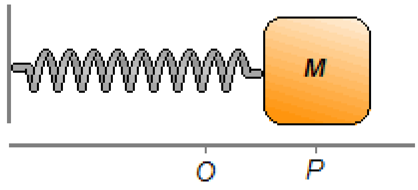
Um bloco de massa $m=0{,}25\ \text{kg}$ é ligado a uma mola de constante elástica $k=1\ \text{N/m}$. O bloco é deslocado de sua posição de equilíbrio *O* até um ponto *P* a $0{,}5\,\text{m}$ e solto a partir do repouso, determine:
a) A equação do movimento;
b) A velocidade do corpo;
c) Calcule a energia mecânica do oscilador;
d) O gráfico da posição *x* em função do tempo *t*.



Dados do problema

- massa do corpo: $m=0{,}25\ \text{kg}$;
- constante elástica da mola: $k=1\ \text{N/m}$;
- posição inicial (*t* = 0): $x_0=0{,}5\ \text{m}$;
- velocidade inicial (*t* = 0): $v_0=0$.

Esquema do problema

Adota-se um sistema de referência com sentido positivo para a direita. O bloco é deslocado até a posição $x_0=0{,}5\ \text{m}$ e quando solto a força elástica da mola fará com que retorne à posição de equilíbrio, a velocidade estará apontando na direção contrária do referencial sendo $v_0=0$ e aumentando em módulo no sentido da posição de equilíbrio (figura 1). Com isto escrevemos as *Condições Iniciais* do problema:

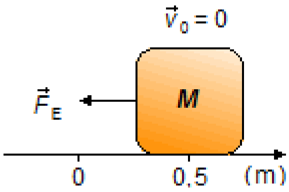


figura 1

$$x(0)=0{,}5\ \text{m} \qquad\qquad v_0=\frac{d\,x(0)}{d\,t}=0$$

Solução

a) Aplicando a *2.ª Lei de Newton*

$$F=m\frac{d^2x}{d\,t^2} \tag{I}$$

temos que as forças a única força que atua no bloco é a força elástica da mola ($\vec{F}_E$), dada por

$$F_E=-k\,x \tag{II}$$

o sinal de negativo na força elástica representa que ela atua *contra o sentido* do deslocamento do bloco (atua no sentido de restabelecer o equilíbrio). Substituindo a expressão de (II) em (I), obtemos

$$-k\,x=m\frac{d^2x}{d\,t^2}$$
$$m\frac{d^2x}{d\,t^2}+k\,x=0$$

esta é uma *Equação Diferencial Ordinária Homogênea de 2.ª Ordem*. Dividindo toda a equação pela massa *m*, temos

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

substituindo os valores dados no problema

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{0,25}x=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4x=0 \tag{III}$$

a solução deste tipo de equação é encontrada fazendo-se as substituições

$$x=e^{\lambda t} \qquad \frac{dx}{dt}=\lambda e^{\lambda t} \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t}+4e^{\lambda t}=0$$
$$e^{\lambda t}\left(\lambda^2+4\right)=0$$
$$\lambda^2+4=\frac{0}{e^{\lambda t}}$$
$$\lambda^2+4=0$$

esta é a *Equação Característica* que tem como solução

$$\Delta=b^2-4ac=0^2-4.1.4=0-18=-16$$

para $\Delta<0$ as raízes são complexas da forma $a+b\mathrm{i}$, onde $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$

$$\lambda^2=-4$$
$$\lambda=\sqrt{-4}$$
$$\lambda_{1,2}=\pm 2\mathrm{i}$$

como $\Delta<0$ a solução da expressão (III) é escrita como

$$x=C_1 e^{\lambda_1 t}+C_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$x=C_1 e^{2\mathrm{i}t}+C_2 e^{-2\mathrm{i}t}$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração, usando a *Relação de Euler* (leia-se óiler) $e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$x=C_1\left(\cos 2t+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,2t\right)+C_2\left(\cos 2t-\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,2t\right)$$
$$x=C_1\cos 2t+\mathrm{i}C_1\,\mathrm{sen}\,2t+C_2\cos 2t-\mathrm{i}C_2\,\mathrm{sen}\,2t$$

coletando os termos em seno e co-seno, temos

$$x=\left(C_1+C_2\right)\cos 2t+\left(\mathrm{i}C_1-\mathrm{i}C_2\right)\mathrm{sen}\,2t$$
$$x=\left(C_1+C_2\right)\cos 2t+\mathrm{i}\left(C_1-C_2\right)\mathrm{sen}\,2t$$

definindo duas novas constantes α e β em termos de C_1 e C_2, ficamos com

$$\alpha\equiv C_1+C_2 \qquad \text{e} \qquad \beta\equiv \mathrm{i}\left(C_1-C_2\right)$$

$$x=\alpha\cos 2t+\beta\,\mathrm{sen}\,2t \tag{IV}$$

multiplicando e dividindo esta expressão por $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$$x=\left(\alpha\cos 2t+\beta\operatorname{sen}2t\right)\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$
$$x=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos 2t+\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\operatorname{sen}2t\right)$$

fazendo as seguintes definições

$$A\equiv\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\qquad,\qquad\cos\varphi\equiv\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\qquad\text{e}\qquad\operatorname{sen}\varphi\equiv\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$x=A\left(\cos\varphi\cos 2t+\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}2t\right)$$

Observação: lembrando da seguinte propriedade trigonométrica

$$oos\left(a-b\right)=\cos a\cos b+\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$$

$$x=A\cos\left(2t-\varphi\right)\tag{V}$$

onde A e φ são constantes de integração determinadas pelas *Condições Iniciais*, derivando a expressão (V) em relação ao tempo, obtemos

derivação de $x=A\cos\left(2t-\varphi\right)$

a função $x(\ t\ )$ é uma função composta cuja derivada, pela regra da cadeia, é do tipo

$$\frac{d\,x[v(t)]}{d\,t}=\frac{d\,x}{d\,v}\frac{d\,v}{d\,t}$$

com $x(v)=\cos v$ e $v(t)=2t-\varphi$, assim as derivadas serão

$$\frac{d\,x}{d\,v}=-\operatorname{sen}v=-\operatorname{sen}\left(2t-\varphi\right)\qquad\text{e}\qquad\frac{d\,v}{d\,t}=2$$

$$\frac{d\,x}{d\,t}=A\left[-\operatorname{sen}\left(2t-\varphi\right).2\right]=-2A\operatorname{sen}\left(2t-\varphi\right)$$

$$\frac{d\,x}{d\,t}=-2A\operatorname{sen}\left(2t-\varphi\right)\tag{VI}$$

substituindo as *Condições Iniciais* em (V) e (VI), temos

$$x(0)=0{,}5=A\cos\left(2.0-\varphi\right)$$
$$0{,}5=A\cos\left(-\varphi\right)$$

como o cosseno é uma função par temos $\cos\varphi=\cos\left(-\varphi\right)$ e a expressão acima fica

$$0{,}5=A\cos\varphi\tag{VII}$$

$$\frac{d\,x(0)}{d\,t}=0=-2A\operatorname{sen}\left(2.0-\varphi\right)$$
$$0=-2A\operatorname{sen}\left(-\varphi\right)$$

como o seno é uma função ímpar $\operatorname{sen}\varphi=-\operatorname{sen}(-\varphi)$ ficamos com

$$0=2A\operatorname{sen}\varphi \tag{VIII}$$

isolando o valor de A na expressão (VII)

$$A=\frac{0,5}{\cos\varphi} \tag{IX}$$

e substituindo em (VIII), obtemos

$$\begin{gathered}0=2.\frac{0,5}{\cos\varphi}.\operatorname{sen}\varphi\\0=\operatorname{tg}\varphi\\\varphi=\operatorname{arc}\operatorname{tg}(0)\\\varphi=0\end{gathered}$$

substituindo o valor de φ em (IX)

$$\begin{gathered}A=\frac{0,5}{\cos 0}\\A=\frac{0,5}{1}\\A=0,5\end{gathered}$$

substituindo estas constantes na expressão (V), temos

$$\boxed{x(t)=0,5\cos 2t}$$

b) A velocidade é dada pela derivada do espaço em função do tempo

$$v=\frac{dx}{dt}$$

a derivada é dada pela expressão (VI), substituindo as constantes obtidas acima, temos

$$v(t)=-2.0,5\operatorname{sen}(2t-0)$$

$$\boxed{v(t)=-\operatorname{sen}2t}$$

c) A energia mecânica de um oscilador harmônico livre é dada por

$$E=\frac{1}{2}kA^2$$

substituindo a constante elástica dada no problema e a amplitude calculada no item anterior, obtemos

$$\begin{gathered}E=\frac{1}{2}.1.0.5^2\\E=\frac{1}{2}.0.25\end{gathered}$$

$$\boxed{E=0.125\ \text{J}}$$

d) Construção do gráfico de

$$x(t)=0,5\cos 2t \tag{X}$$

fazendo $x(t)=0$ encontramos as raízes da função

$$\begin{gathered}x(t)=0,5\cos 2t=0\\ \cos 2t=\frac{0}{0,5}\\ \cos 2t=0\end{gathered}$$

a função co-seno é zero quando seu argumento $(2t)$ é igual a $\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ldots,\ \frac{(2n+1)\pi}{2}$, com n = 0, 1, 2, 3,..., portanto devemos ter

$$\begin{gathered}2t=\frac{(2n+1)\pi}{2}\\ t=\frac{(2n+1)\pi}{2.2}\\ t=\frac{(2n+1)\pi}{4}\end{gathered}$$

para esses valores de t temos as raízes da função co-seno, os quatro primeiros valores serão, para n = 0, 1, 2 e 3, respectivamente, $t=\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$. estes valores estão mostrados no gráfico 1.

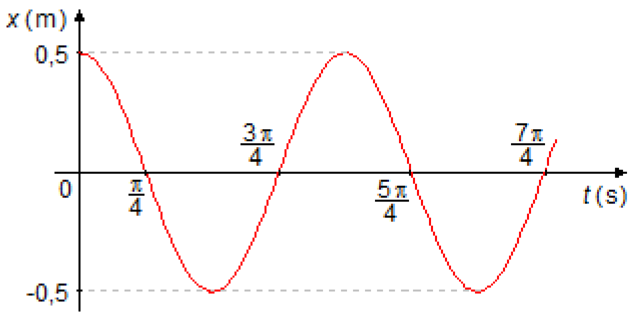


gráfico 1

A função oscila entre os valores 0.5 e – 0,5 da amplitude.