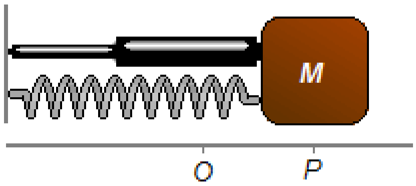
Um bloco de massa $m=0{,}25\ \text{kg}$ é ligado a uma mola de constante elástica $k=16{,}25\ \text{N/m}$ e a um amortecedor de constante de amortecimento $b=0{,}5\ \text{N.s/m}$. O bloco é deslocado de sua posição de equilíbrio O até um ponto P a $0{,}1\ \text{m}$ e lançado se afastando do ponto de equilíbrio com velocidade inicial de $0{,}7\ \text{m/s}$. Adotando que a força de amortecimento é proporcional a velocidade, determine:



a) A equação do movimento;
b) Classifique o tipo de oscilação;
c) O gráfico da posição *x* em função do tempo *t*.

Dados do problema

- massa do corpo: $m=0{,}25\ \text{kg}$;
- constante elástica da mola: $k=16{,}25\ \text{N/m}$;
- constante de amortecimento: $b=0{,}5\ \text{N.s/m}$;
- posição inicial (*t* = 0): $x_0=0{,}1\ \text{m}$;
- velocidade inicial (*t* = 0): $v_0=0{,}7\ \text{m/s}$.

Esquema do problema

Adota-se um sistema de referência com sentido positivo para a direita. O bloco é deslocado até a posição $x_0=0{,}1\ \text{m}$ e lançado com velocidade inicial $v_0=0{,}7\ \text{m/s}$ no mesmo sentido do referencial. Quando solto a força elástica da mola atuará no sentido de restabelecer o posição de equilíbrio (figura 1). Com isto escrevemos as *Condições Iniciais* do problema:

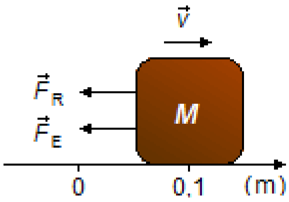


figura 1

$$x(0)=0{,}1\ \text{m} \qquad\qquad v_0=\frac{dx(0)}{dt}=0{,}7\ \text{m/s}$$

Solução

a) Aplicando a *2.ª Lei de Newton*

$$F=m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{I}$$

temos que as forças que atuam no bloco são a força elástica da mola ($\vec{F}_E$) e a força de amortecimento ($\vec{F}_R$), dadas, em módulo, por

$$F_E=-kx \qquad\qquad F_R=-bv=-b\frac{dx}{dt} \tag{II}$$

o sinal de negativo na força elástica representa que ela atua *contra o sentido* do deslocamento do bloco (atua no sentido de restabelecer o equilíbrio), na força de amortecimento representa que ela atua *contra o sentido* da velocidade (atua no sentido de frear o movimento). Substituindo as expressões de (II) em (I), obtemos

$$-kx-b\frac{dx}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0$$

esta é uma *Equação Diferencial Ordinária de 2.ª Ordem*. Dividindo toda a equação pela massa *m*, temos

$$\frac{d^2 x}{d t^2}+\frac{b}{m}\frac{d x}{d t}+\frac{k}{m}x=0$$

substituindo os valores dados no problema

$$\frac{d^2 x}{d t^2}+\frac{0,5}{0,25}\frac{d x}{d t}+\frac{16,25}{0,25}x=0$$

$$\frac{d^2 x}{d t^2}+2\frac{d x}{d t}+65x=0 \qquad \text{(III)}$$

a solução deste tipo de equação é encontrada fazendo-se as substituições

$$x=\mathrm{e}^{\lambda t} \qquad \frac{d x}{d t}=\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t} \qquad \frac{d^2 x}{d t^2}=\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t}$$

$$\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t}+2\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t}+65\mathrm{e}^{\lambda t}=0$$

$$\mathrm{e}^{\lambda t}\left(\lambda^2+2\lambda+65\right)=0$$

$$\lambda^2+2\lambda+65=\frac{0}{\mathrm{e}^{\lambda t}}$$

$$\lambda^2+2\lambda+65=0$$

esta é a *Equação Característica* que tem como solução

$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4.1.65=4-260=-256$$

para $\Delta<0$ as raízes são complexas da forma $a+b\mathrm{i}$, onde $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$

$$\lambda_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+\sqrt{-256}}{2.1}=\frac{-2+16\,\mathrm{i}}{2}=-1+8\,\mathrm{i}$$

e

$$\lambda_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-\sqrt{-256}}{2.1}=\frac{-2-16\,\mathrm{i}}{2}=-1-8\,\mathrm{i}$$

como $\Delta<0$ a solução da expressão (III) é escrita como

$$x=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

$$x=C_1\mathrm{e}^{(-1+8\,\mathrm{i})t}+C_2\mathrm{e}^{(-1-8\,\mathrm{i})t}$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração, aplicando a propriedade $a^{m+n}=a^m.a^n$ re-escrevemos

$$x=C_1\mathrm{e}^{-t}.\mathrm{e}^{8\,\mathrm{i}t}+C_2\mathrm{e}^{-t}.\mathrm{e}^{-8\,\mathrm{i}t}$$

$$x=\mathrm{e}^{-t}\left(C_1\mathrm{e}^{8\,\mathrm{i}t}+C_2\mathrm{e}^{-8\,\mathrm{i}t}\right)$$

usando a *Relação de Euler* (leia-se óiler) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$x=\mathrm{e}^{-t}\left[C_1\left(\cos 8t+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,8t\right)+C_2\left(\cos 8t-\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,8t\right)\right]$$

$$x=\mathrm{e}^{-t}\left[C_1\cos 8t+\mathrm{i}C_1\,\mathrm{sen}\,8t+C_2\cos 8t-\mathrm{i}\,C_2\,\mathrm{sen}\,8t\right]$$

coletando os termos em seno e co-seno, temos

$$x=\mathrm{e}^{-t}\left[\left(C_1+C_2\right)\cos 8t+\left(\mathrm{i}C_1-\mathrm{i}C_2\right)\operatorname{sen}8t\right]$$
$$x=\mathrm{e}^{-t}\left[\left(C_1+C_2\right)\cos 8t+\mathrm{i}\left(C_1-C_2\right)\operatorname{sen}8t\right]$$

definindo duas novas constantes α e β em termos de C_1 e C_2, ficamos com

$$\alpha\equiv C_1+C_2\qquad \text{e}\qquad \beta\equiv \mathrm{i}\left(C_1-C_2\right)$$

$$x=\mathrm{e}^{-t}\left[\alpha\cos 8t+\beta\operatorname{sen}8t\right]\tag{IV}$$

multiplicando e dividindo esta expressão por $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$$x=\mathrm{e}^{-t}\left[\alpha\cos 8t+\beta\operatorname{sen}8t\right]\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$
$$x=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\;\mathrm{e}^{-t}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos 8t+\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\operatorname{sen}8t\right]$$

fazendo as seguintes definições

$$A\equiv\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\qquad,\qquad \cos\varphi\equiv\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\qquad \text{e}\qquad \operatorname{sen}\varphi\equiv\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$x=A\,\mathrm{e}^{-t}\left[\cos\varphi\cos 8t+\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}8t\right]$$

Observação: lembrando da seguinte propriedade trigonométrica

$$os\left(a-b\right)=\cos a\cos b+\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$$

$$x=A\,\mathrm{e}^{-t}\cos\left(8t-\varphi\right)\tag{V}$$

onde A e φ são constantes de integração determinadas pelas *Condições Iniciais*, derivando a expressão (V) em relação ao tempo, obtemos

derivação de $x=A\,\mathrm{e}^{-t}\cos\left(8t-\varphi\right)$

derivando o produto de funções na forma:

$$uv=u'v+uv'$$

onde $u=A\,\mathrm{e}^{-t}$ e $v=\cos\left(8t-\varphi\right)$ e a função cosseno é uma função composta cuja derivada é do tipo

$$\frac{d\,v[w(t)]}{d\,t}=\frac{d\,v}{d\,w}\frac{d\,w}{d\,t}$$

com $w=8t-\varphi$

$$\frac{d\,v}{d\,w}=-\operatorname{sen}w=-\operatorname{sen}\left(8t-\varphi\right)\qquad \text{e}\qquad \frac{d\,w}{d\,t}=8$$

$$\frac{d\,x}{d\,t}=A\,(-1).\mathrm{e}^{-t}\cos\left(8t-\varphi\right)+A\,\mathrm{e}^{-t}\left[-\operatorname{sen}\left(8t-\varphi\right).8\right]=$$
$$=-A\,\mathrm{e}^{-t}\cos\left(8t-\varphi\right)-8A\,\mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen}\left(8t-\varphi\right)$$

$$\frac{dx}{dt}=-A\,\mathrm{e}^{-t}\cos(8t-\varphi)-8A\,\mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen}(8t-\varphi) \qquad \text{(VI)}$$

substituindo as *Condições Iniciais* em (V) e (VI), temos

$$\begin{gathered}
x(0)=0{,}1=A\,\mathrm{e}^{-0}\cos(8.0-\varphi)\\
0{,}1=A\,\mathrm{e}^{-0}\cos(8.0-\varphi)\\
0{,}1=A\cos(-\varphi)
\end{gathered}$$

como o co-seno é uma função par temos $\cos\varphi=\cos(-\varphi)$ e a expressão acima fica

$$0{,}1=A\cos\varphi \qquad \text{(VII)}$$

$$\begin{gathered}
\frac{dx(0)}{dt}=0{,}7=-A\,\mathrm{e}^{-0}\cos(8.0-\varphi)-8A\,\mathrm{e}^{-0}\operatorname{sen}(8.0-\varphi)\\
0{,}7=-A\,\mathrm{e}^{-0}\cos(8.0-\varphi)-8A\,\mathrm{e}^{-0}\operatorname{sen}(8.0-\varphi)\\
0{,}7=-A\cos(-\varphi)-8A\operatorname{sen}(-\varphi)
\end{gathered}$$

como o co-seno é uma função par e seno é uma função ímpar $\operatorname{sen}\varphi=-\operatorname{sen}(-\varphi)$ ficamos com

$$0{,}7=-A\cos\varphi+8A\operatorname{sen}\varphi \qquad \text{(VIII)}$$

isolando o valor de *A* na expressão (VII)

$$A=\frac{0{,}1}{\cos\varphi} \qquad \text{(IX)}$$

e substituindo em (VIII), obtemos

$$\begin{gathered}
0{,}7=-\frac{0{,}1}{\cos\varphi}.\cos\varphi+8.\frac{0{,}1}{\cos\varphi}.\operatorname{sen}\varphi\\
0{,}7=-0{,}1+0{,}8\,\mathrm{tg}\,\varphi\\
0{,}8\,\mathrm{tg}\,\varphi=0{,}7+0{,}1\\
0{,}8\,\mathrm{tg}\,\varphi=0{,}8\\
\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{0{,}8}{0{,}8}\\
\mathrm{tg}\,\varphi=1\\
\varphi=\mathrm{arc\,tg}(1)\\
\varphi=\frac{\pi}{4}
\end{gathered}$$

substituindo o valor de φ em (IX)

$$\begin{gathered}
A=\frac{0{,}1}{\cos\frac{\pi}{4}}\\
A=\frac{0{,}1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\\
A=\frac{0{,}1.2}{\sqrt{2}}\\
A=\frac{0{,}2}{\sqrt{2}}
\end{gathered}$$

multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{2}$

$$A=\frac{0{,}2}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$A=\frac{0{,}2\sqrt{2}}{2}$$
$$A=0{,}1\sqrt{2}$$

substituindo estas constantes na expressão (IV), temos

$$\boxed{x(t)=0{,}1\sqrt{2}\;e^{-t}\cos\left(8t-\frac{\pi}{4}\right)}$$

b) Como Δ<0 este é um **oscilador sub-crítico**.

c) Construção do gráfico de

$$x(t)=0{,}1\sqrt{2}\;e^{-t}\cos\left(8t-\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(X)}$$

A função $x(t)$ é o produto de duas funções, $f(t)=0{,}1\sqrt{2}\;e^{-t}$ e $g(t)=\cos\left(8t-\frac{\pi}{4}\right)$. Para determinar as raízes fazemos $x(t)=0$, como $x(t)=f(t)\,g(t)$ temos $f(t)=0$ ou $g(t)=0$.

- Para $g(t)=0$, temos

$$g(t)=\cos\left(8t-\frac{\pi}{4}\right)=0$$
$$\cos\left(8t-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

a função co-seno é zero quando seu argumento $\left(8t-\frac{\pi}{4}\right)$ é igual a $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$,...., $\frac{(2n+1)\pi}{2}$, com n = 0, 1, 2, 3,..., portanto devemos ter

$$8t-\frac{\pi}{4}=\frac{(2n+1)\pi}{2}$$
$$8t=\frac{2\pi n}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$
$$8t=\frac{4\pi n+2\pi+\pi}{4}$$
$$8t=\frac{4\pi n+3\pi}{4}$$
$$8t=\frac{(4n+3)\pi}{4}$$
$$t=\frac{(4n+3)\pi}{4.8}$$
$$t=\frac{(4n+3)\pi}{32}$$

para esses valores de *t* temos as raízes da função co-seno, os quatro primeiros valores serão, para *n* = 0, 1, 2 e 3, respectivamente, *t* = 0,29; 0,69; 1,08 e 1,47 estes valores estão mostrados no gráfico 1.

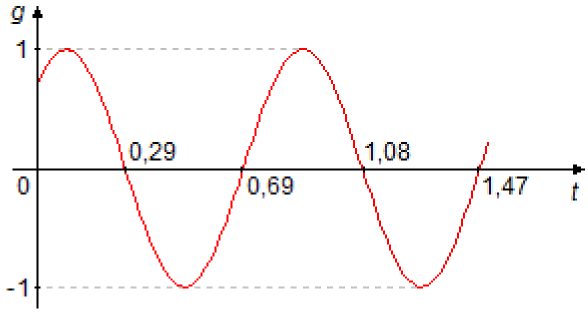


gráfico 1

- Para $f(t)=0$, temos

$$\begin{aligned} f(t) &= 0{,}1\sqrt{2}\;\mathrm{e}^{-t}=0\\ 0{,}1\sqrt{2}\;\mathrm{e}^{-t} &= 0\\ \mathrm{e}^{-t} &= \frac{0}{0{,}1\sqrt{2}}\\ \mathrm{e}^{-t} &= 0 \end{aligned}$$

como não exite *t* que satisfaça essa igualdade a função $f(t)$ não cruza o eixo das abscissas. Para qualquer valor de *t* real a função será sempre positiva $\left(f(t)>0\right)$.

Derivando a expressão $f(t)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= (-1).0{,}1\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}\\ \frac{df}{dt} &= -0{,}1\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

para qualquer valor de *t* real a derivada será sempre negativa $\left(\frac{df(t)}{dt}<0\right)$ e a função decresce sempre. Fazendo $\frac{df(t)}{dt}=0$ encontramos pontos de máximos e mínimos da função.

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= -0{,}1\sqrt{2}\;\mathrm{e}^{-t}=0\\ \mathrm{e}^{-t} &= \frac{0}{-0{,}1\sqrt{2}}\\ \mathrm{e}^{-t} &= 0 \end{aligned}$$

como não exite *t* que satisfaça essa igualdade não existem pontos de máximo ou mínimo da função.

Derivando uma segunda vez a função temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{dt^2} &= -(-1).0{,}1\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}\\ \frac{d^2f}{dt^2} &= 0{,}1\sqrt{2}\;\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

para qualquer valor de *t* real a derivada segunda será sempre positiva $\left(\dfrac{d^2 f(t)}{d t^2}>0\right)$ e a função possui "boca" voltada para cima. Fazendo $\dfrac{d^2 f(t)}{d t^2}=0$ encontramos pontos de inflexão na função.

$$
\begin{gathered}
\frac{d^2 f}{d t^2}=0{,}1 \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{-t}=0 \\
0{,}1 \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{-t}=0 \\
\mathrm{e}^{-t}=\frac{0}{0{,}1 \sqrt{2}} \\
\mathrm{e}^{-t}=0
\end{gathered}
$$

como não exite *t* que satisfaça essa igualdade não existem pontos de inflexão na função.

Para *t* = 0 a expressão de $f(0)$ fornece

$$
\begin{gathered}
f(0)=0{,}1 \sqrt{2}\ \mathrm{e}^{-0} \\
f(0)=0{,}1 \sqrt{2} \\
f(0)=0{,}1\,.\,1{,}4 \\
f(0)=0{,}14
\end{gathered}
$$

Como a variável *t* representa o tempo não tem sentido o calculo de valores negativos ($t<0$), para *t* tendendo a infinito, temos

$$
\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)=\lim_{t \rightarrow \infty} 0{,}1 \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{-t}=\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{0{,}1 \sqrt{2}}{\mathrm{e}^{t}}=0
$$

Da análise feita acima traçamos o gráfico de *f* em função de *t* mostrado no gráfico 2.

gráfico 2

Como $x(t)=f(t)\, g(t)$ a combinação dos gráficos produz uma curva que oscila como a função co-seno amortecida pela exponencial (gráfico 3).

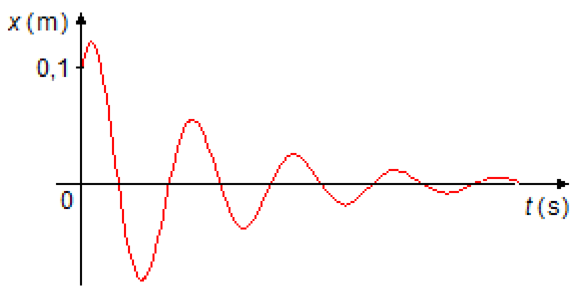


gráfico 3