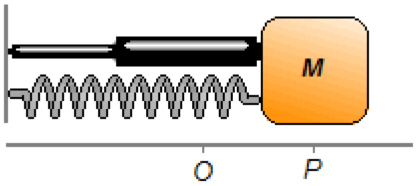
Um bloco de massa $m=0{,}25\ \text{kg}$ é ligado a uma mola de constante elástica $k=0{,}25\ \text{N/m}$ e a um amortecedor de constante de amortecimento $b=0{,}5\ \text{N.s/m}$. O bloco é deslocado de sua posição de equilíbrio *O* até um ponto *P* a $0{,}1\ \text{m}$ e solto a partir do repouso. Adotando que a força de amortecimento é proporcional a velocidade, determine:



a) A equação do movimento;
b) Classifique o tipo de oscilação;
c) O gráfico da posição *x* em função do tempo *t*.

Dados do problema

- massa do corpo: $m=0{,}25\ \text{kg}$;
- constante elástica da mola: $k=0{,}25\ \text{N/m}$;
- constante de amortecimento: $b=0{,}5\ \text{N.s/m}$;
- posição inicial ($t=0$): $x_0=0{,}1\ \text{m}$;
- velocidade inicial ($t=0$): $v_0=0$.

Esquema do problema

Adota-se um sistema de referência com sentido positivo para a direita. O bloco é deslocado até a posição $x_0=0{,}1\ \text{m}$ e quando solto a força elástica da mola fará com que retorne à posição de equilíbrio, a velocidade estará apontando na direção contrária do referencial sendo $v_0=0$ e aumentando em módulo no sentido da posição de equilíbrio (figura 1). Com isto escrevemos as *Condições Iniciais* do problema:

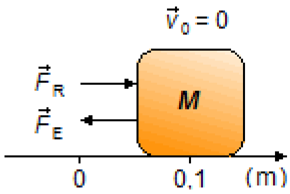


figura 1

$$x(0)=0{,}1\ \text{m} \qquad\qquad v_0=\frac{d\,x(0)}{d\,t}=0$$

Solução

a) Aplicando a *2.ª Lei de Newton*

$$F=m\frac{d^2x}{d\,t^2} \tag{I}$$

temos que as forças que atuam no bloco são a força elástica da mola ($\vec{F}_E$) e a força de amortecimento ($\vec{F}_R$), dadas, em módulo, por

$$F_E=-k\,x \qquad\qquad F_R=-b\,v=-b\frac{d\,x}{d\,t} \tag{II}$$

o sinal de negativo na força elástica representa que ela atua *contra o sentido* do deslocamento do bloco (atua no sentido de restabelecer o equilíbrio), na força de amortecimento representa que ela atua *contra o sentido* da velocidade (atua no sentido de frear o movimento). Substituindo as expressões de (II) em (I), obtemos

$$-k\,x-b\frac{d\,x}{d\,t}=m\frac{d^2x}{d\,t^2}$$

$$m\frac{d^2x}{d\,t^2}+b\frac{d\,x}{d\,t}+k\,x=0$$

esta é uma *Equação Diferencial Ordinária de 2.ª Ordem*. Dividindo toda a equação pela massa *m*, temos

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

substituindo os valores dados no problema

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{0,5}{0,25}\frac{dx}{dt}+\frac{0,25}{0,25}x=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+x=0 \tag{III}$$

a solução deste tipo de equação é encontrada fazendo-se as substituições

$$x=\mathrm{e}^{\lambda t} \qquad \frac{dx}{dt}=\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t} \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t}$$

$$\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t}+2\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{\lambda t}=0$$

$$\mathrm{e}^{\lambda t}\left(\lambda^2+2\lambda+1\right)=0$$

$$\lambda^2+2\lambda+1=\frac{0}{\mathrm{e}^{\lambda t}}$$

$$\lambda^2+2\lambda+1=0$$

esta é a *Equação Característica* que tem como solução

$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4.1.1=4-4=0$$

$$\lambda_1=\lambda_2=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2.1}=\frac{-2}{2}=-1$$

como Δ=0 a solução da expressão (III) é escrita como

$$x=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+C_2t\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

$$x=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2t\,\mathrm{e}^{-t} \tag{IV}$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração determinadas pelas *Condições Iniciais*, derivando a expressão (IV) em relação ao tempo, obtemos

derivação de $x=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2t\,\mathrm{e}^{-t}$

a derivada do primeiro termo é: $(-1)C_1\mathrm{e}^{-t}\Rightarrow -C_1\mathrm{e}^{-t}$

a derivada do segundo termo é a derivada de um produto de funções da forma:

$$uv=u'v+uv'$$

onde $u=t$ e $v=\mathrm{e}^{-t}$ portanto

$$\frac{dx}{dt}=C_2 1\,\mathrm{e}^{-t}+(-1)\,C_2t\,\mathrm{e}^{-t}=C_2\mathrm{e}^{-t}-C_2t\,\mathrm{e}^{-t}\,C_2\mathrm{e}^{-t}\left(1-t\right)$$

$$\frac{dx}{dt}=-C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-t}\left(1-t\right) \tag{V}$$

substituindo as *Condições Iniciais* em (IV) e (V), temos

$$\begin{aligned} x(0)=0{,}1 &= C_1 e^{-0}+C_2.0.e^{-0}\\ 0{,}1 &= C_1 e^{0}+0\\ C_1 &= 0{,}1 \end{aligned} \tag{VI}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx(0)}{dt}=0 &= -C_1 e^{-0}+C_2 e^{-0}(1-0)\\ 0 &= -C_1 e^{0}+C_2 e^{0}1\\ 0 &= -C_1+C_2 \end{aligned}$$

substituindo o valor de C_1 encontrado em (VI)

$$\begin{aligned} 0 &= -0{,}1+C_2\\ C_2 &= 0{,}1 \end{aligned} \tag{VII}$$

substituindo estas constantes na expressão (IV), temos

$$x(t)=0{,}1\,e^{-t}+0{,}1\,t\,e^{-t}$$

$$\boxed{x(t)=0{,}1\,e^{-t}(1+t)}$$

b) Como Δ=0 este é um **oscilador crítico**.

c) Construção do gráfico de

$$x(t)=0{,}1\,e^{-t}(1+t) \tag{IX}$$

fazendo $x(t)=0$ encontramos as raízes da função

$$\begin{aligned} x(t)=0{,}1\,e^{-t}(1+t) &= 0\\ 0{,}1\,e^{-t}(1+t) &= 0 \end{aligned}$$

temos as raízes quando $0{,}1\,e^{-t}=0$ ou $1+t=0$, no primeiro caso não existe *t* que satisfaça a igualdade, no segundo caso a função $x(t)$ cruza o eixo das abscissas em $t=-1$, existe uma raiz no ponto $(t,x)=(-1,0)$.

Derivando a expressão (IX), temos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (-1).0{,}1\,e^{-t}(1+t)+0{,}1\,e^{-t}(0+1)\\ \frac{dx}{dt} &= -0{,}1\,e^{-t}(1+t)+0{,}1\,e^{-t}1\\ \frac{dx}{dt} &= -0{,}1\,e^{-t}-0{,}1\,e^{-t}t+0{,}1\,e^{-t}\\ \frac{dx}{dt} &= -0{,}1\,t\,e^{-t} \end{aligned} \tag{X}$$

fazendo $\dfrac{dx(t)}{dt}=0$ encontramos pontos de máximos e mínimos da função.

$$\frac{dx}{dt}=-0{,}1\,t\,e^{-t}=0$$

temos as raízes quando $0{,}1\,\mathrm{e}^{-t}=0$ ou $t=0$, no primeiro caso não existe *t* que satisfaça a igualdade, no segundo caso substituindo $t=0$ na expressão (IX), temos

$$\begin{gathered} x(0)=0{,}1\,\mathrm{e}^{-0}(1+0)\\ x=0{,}1 \end{gathered}$$

exite um ponto de máximo ou mínimo em $(t,x)=(0;\ 0{,}1)$. Para valores de *t* negativo (*t*<0) a derivada será sempre positiva $\left(\dfrac{d\,x(t)}{d\,t}>0\right)$ e a função cresce, para valores de *t* positivo (*t*>0) a derivada será sempre negativa $\left(\dfrac{d\,x(t)}{d\,t}<0\right)$ e a função decresce.

Derivando uma segunda vez a função temos

derivação de $\dfrac{d\,x}{d\,t}=-0{,}1\,t\,\mathrm{e}^{-t}$

a derivando o produto de funções na forma:

$$u\,v=u'\,v+u\,v'$$

onde $u=-0{,}1\,t$ e $v=\mathrm{e}^{-t}$ portanto

$$\frac{d^2x}{d\,t^2}=-0{,}1\,.(1)\,\mathrm{e}^{-t}+(-0{,}1t\,(-1)\,\mathrm{e}^{-t})=-0{,}1\,\mathrm{e}^{-t}+0{,}1\,t\,\mathrm{e}^{-t}=0{,}1\,\mathrm{e}^{-t}(-1+t)$$

$$\frac{d^2x}{d\,t^2}=0{,}1\,\mathrm{e}^{-t}(-1+t) \tag{XI}$$

fazendo $\dfrac{d^2x(t)}{d\,t^2}=0$ encontramos pontos de inflexão na função.

$$\frac{d^2x}{d\,t^2}=0{,}1\,\mathrm{e}^{-t}(-1+t)=0$$

temos as raízes quando $0{,}1\,\mathrm{e}^{-t}=0$ ou $-1+t=0$, no primeiro caso não existe *t* que satisfaça a igualdade, no segundo caso temos $t=1$ substituindo esse valor na expressão (IX), temos

$$\begin{gathered} x(1)=0{,}1\,\mathrm{e}^{-1}(1+1)\\ x(1)=0{,}1\,.\,0{,}37\,.\,2\\ x=0{,}074 \end{gathered}$$

exite um ponto de inflexão em $(t,x)=(1;\ 0{,}074)$. Para valores de *t* menor que 1 (*t*<1) a derivada segunda será sempre negativa $\left(\dfrac{d^2x(t)}{d\,t^2}<0\right)$ e a função possui "boca" voltada para baixo, para valores de *t* maior que 1 (*t*>*1*) a derivada segunda será sempre positiva $\left(\dfrac{d^2x(t)}{d\,t^2}>0\right)$ e a função possui "boca" voltada para cima. Como o gráfico apresenta "boca" voltada para baixo para *t* menor que 1 o ponto $(t,x)=(0;\ 0{,}1)$ encontrado na primeira derivada é ponto de máximo.

Como a variável *t* representa o tempo não tem sentido o calculo de valores negativos ($t<0$), para *t* tendendo a infinito, temos

$$\lim_{t\rightarrow\infty}x(t)=\lim_{t\rightarrow\infty}0{,}1\,\mathrm{e}^{-t}(1+t)=\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{0{,}1}{\mathrm{e}^{-t}}(1+t)=\frac{0{,}1}{\mathrm{e}^{-\infty}}(1+\infty)=0$$

a função $\dfrac{0,1}{e^{-\infty}}$ tende a zero, a função $(1+\infty)$ tende a infinito, como a exponencial converge mais rápido o limite da função tende a zero.

Da análise feita acima traçamos o gráfico da posição em função do tempo mostrado na gráfico 1.

gráfico 1