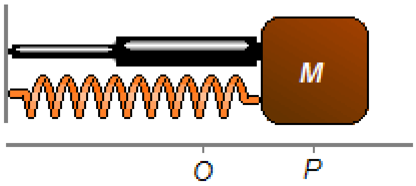
Um bloco de massa $m=0{,}1\ \text{kg}$ é ligado a uma mola de constante elástica $k=0{,}6\ \text{N/m}$ e a um amortecedor de constante de amortecimento $b=0{,}5\ \text{N.s/m}$. O bloco é deslocado de sua posição de equilíbrio *O* até um ponto *P* a $0{,}1\ \text{m}$ e solto com velocidade inicial de $0{,}28\ \text{m/s}$ na direção do ponto *O*. Adotando que a força de amortecimento é proporcional a velocidade, determine:



a) A equação do movimento;
b) Classifique o tipo de oscilação;
c) O gráfico da posição *x* em função do tempo *t*.

Dados do problema

- massa do corpo: $m=0{,}1\ \text{kg}$;
- constante elástica da mola: $k=0{,}6\ \text{N/m}$;
- constante de amortecimento: $b=0{,}5\ \text{N.s/m}$;
- posição inicial ($t=0$): $x_0=0{,}1\ \text{m}$;
- velocidade inicial ($t=0$): $v_0=0{,}28\ \text{m}$.

Esquema do problema

Adota-se um sistema de referência com sentido positivo para a direita. O bloco é deslocado até a posição $x_0=0{,}1\ \text{m}$ e quando solto a força elástica da mola fará com que retorne à posição de equilíbrio, a velocidade estará apontando na direção contrária do referencial sendo $v_0=-0{,}28\ \text{m/s}$ (figura 1). Com isto escrevemos as *Condições Iniciais* do problema:

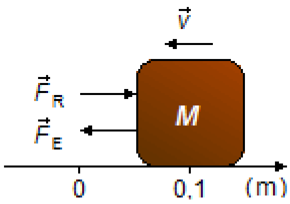


figura 1

$$x(0)=0{,}1\ \text{m} \qquad\qquad v_0=\frac{dx(0)}{dt}=-0{,}28\ \text{m/s}$$

Solução

a) Aplicando a *2.ª Lei de Newton*

$$F=m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{I}$$

temos que as forças que atuam no bloco são a força elástica da mola ($\vec{F}_E$) e a força de amortecimento ($\vec{F}_R$) dadas por

$$F_E=-kx \qquad\qquad F_R=-bv=-b\frac{dx}{dt} \tag{II}$$

o sinal de negativo na força elástica representa que ela atua *contra o sentido* do deslocamento do bloco (atua no sentido de restabelecer o equilíbrio), na força de amortecimento representa que ela atua *contra o sentido* da velocidade (atua no sentido de frear o movimento). Substituindo as expressões de (II) em (I), obtemos

$$-kx-b\frac{dx}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0$$

esta é uma *Equação Diferencial Ordinária Homogênea de 2.ª Ordem*. Dividindo toda a equação pela massa *m*, temos

$$\frac{d^2 x}{d t^2}+\frac{b}{m}\frac{d x}{d t}+\frac{k}{m}x=0$$

substituindo os valores dados no problema

$$\frac{d^2 x}{d t^2}+\frac{0,5}{0,1}\frac{d x}{d t}+\frac{0,6}{0,1}x=0$$

$$\frac{d^2 x}{d t^2}+5\frac{d x}{d t}+6x=0 \qquad \text{(III)}$$

a solução deste tipo de equação é encontrada fazendo-se as substituições

$$x=e^{\lambda t} \qquad \frac{d x}{d t}=\lambda e^{\lambda t} \qquad \frac{d^2 x}{d t^2}=\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t}+5\lambda e^{\lambda t}+6e^{\lambda t}=0$$

$$e^{\lambda t}\left(\lambda^2+5\lambda+6\right)=0$$

$$\lambda^2+5\lambda+6=\frac{0}{e^{\lambda t}}$$

$$\lambda^2+5\lambda+6=0$$

esta é a *Equação Característica* que tem como solução

$$\Delta=b^2-4ac=5^2-4.1.6=25-24=1$$

$$\lambda_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{1}}{2.1}=\frac{-5+1}{2}=-2 \quad \text{e} \quad \lambda_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-\sqrt{1}}{2.1}=\frac{-5-1}{2}=-3$$

como $\Delta>0$ a solução da expressão (III) é escrita como

$$x=C_1 e^{\lambda_1 t}+C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$x=C_1 e^{-2t}+C_2 e^{-3t} \qquad \text{(IV)}$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração determinadas pelas *Condições Iniciais*, derivando a expressão (IV) em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d x}{d t}=-2C_1 e^{-2t}-3C_2 e^{-3t} \qquad \text{(V)}$$

substituindo as *Condições Iniciais* em (IV) e (V), temos

$$x(0)=0,1=C_1 e^{-2.0}+C_2 e^{-3.0}$$

$$0,1=C_1 e^0+C_2 e^0$$

$$0,1=C_1+C_2 \qquad \text{(VI)}$$

$$\frac{d x(0)}{d t}=-0,28=-2C_1 e^{-2.0}-3C_2 e^{-3.0}$$

$$-0,28=-2C_1 e^0-3C_2 e^0$$

$$-0,28=-2C_1-3C_2 \qquad \text{(VII)}$$

As expressões (VI) e (VII) formam um sistema de duas equações a duas incógnitas (C_1 e C_2)

$$\left|\begin{array}{l} C_1+C_2=0,1 \\ -2\,C_1-3\,C_2=-0,28 \end{array}\right.$$

isolando o valor de C_1 na primeira equação e substituindo na segunda, vem

$$C_1=0,1-C_2 \tag{VIII}$$

$$\begin{gathered} -2\left(0,1-C_2\right)-3\,C_2=-0,28 \\ -0,2+2C_2-3\,C_2=-0,28 \\ -C_2=-0,2+0,2 \\ -C_2=-0,08 \\ C_2=0,08 \end{gathered}$$

substituindo este valor em (VIII)

$$\begin{gathered} C_1=0,1-0,08 \\ C_1=0,02 \end{gathered}$$

substituindo estas constantes na expressão (IV), temos

$$\boxed{x(t)=0,02\,\mathrm{e}^{-2t}+0,08\,\mathrm{e}^{-3t}}$$

b) Como Δ>0 este é um **oscilador super-crítico**.

c) Construção do gráfico de

$$x(t)=0,02\,\mathrm{e}^{-2t}+0,08\,\mathrm{e}^{-3t} \tag{IX}$$

fazendo $x(t)=0$ encontramos as raízes da função

$$\begin{gathered} x(t)=0,02\,\mathrm{e}^{-2t}+0,08\,\mathrm{e}^{-3t}=0 \\ 0,02\,\mathrm{e}^{-2t}=-0,08\,\mathrm{e}^{-3t} \\ \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{\mathrm{e}^{-3t}}=-\frac{0,08}{0,02} \\ \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{3t}=-4 \\ \mathrm{e}^{-2t+3t}=-4 \\ \mathrm{e}^{t}=-4 \end{gathered}$$

como não exite *t* que satisfaça essa igualdade a função $x(t)$ não cruza o eixo das abscissas. Para qualquer valor de *t* real a função será sempre positiva $\left(x(t)>0\right)$, o gráfico esta acima do eixo das abscissas.

Derivando a expressão (IX), temos

$$\frac{d\,x}{d\,t}=(-2).0,02\,\mathrm{e}^{-2t}+(-3).0,08\,\mathrm{e}^{-3t}$$

$$\frac{d\,x}{d\,t}=-0,04\,\mathrm{e}^{-2t}-0,24\,\mathrm{e}^{-3t} \tag{X}$$

para qualquer valor de t real a derivada será sempre negativa $\left(\dfrac{d\,x(t)}{d\,t}<0\right)$ e a função decresce sempre. Fazendo $\dfrac{d\,x(t)}{d\,t}=0$ encontramos pontos de máximos e mínimos da função.

$$
\begin{aligned}
\frac{d\,x}{d\,t} &= -0{,}04\,\mathrm{e}^{-2t}-0{,}24\,\mathrm{e}^{-3t}=0\\
0{,}04\,\mathrm{e}^{-2t} &= -0{,}24\,\mathrm{e}^{-3t}\\
\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{\mathrm{e}^{-3t}} &= -\frac{0{,}24}{0{,}04}\\
\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{3t} &= -6\\
\mathrm{e}^{-2t+3t} &= -6\\
\mathrm{e}^{t} &= -6
\end{aligned}
$$

como não exite t que satisfaça essa igualdade não existem pontos de máximo ou mínimo da função.

Derivando uma segunda vez a função temos

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{d\,t^2} &= -(-2)\,.\,0{,}04\,\mathrm{e}^{-2t}-(-3)\,.\,0{,}24\,\mathrm{e}^{-3t}\\
\frac{d^2x}{d\,t^2} &= 0{,}08\,\mathrm{e}^{-2t}+0{,}72\,\mathrm{e}^{-3t} \qquad \text{(XI)}
\end{aligned}
$$

para qualquer valor de t real a derivada segunda será sempre positiva $\left(\dfrac{d^2x(t)}{d\,t^2}>0\right)$ e a função possui “boca” voltada para cima. Fazendo $\dfrac{d^2x(t)}{d\,t^2}=0$ encontramos pontos de inflexão na função.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{d\,t^2} &= 0{,}08\,\mathrm{e}^{-2t}+0{,}72\,\mathrm{e}^{-3t}=0\\
0{,}08\,\mathrm{e}^{-2t} &= -0{,}72\,\mathrm{e}^{-3t}\\
\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{\mathrm{e}^{-3t}} &= -\frac{0{,}72}{0{,}08}\\
\mathrm{e}^{-2t}.\mathrm{e}^{-3t} &= -9\\
\mathrm{e}^{-2t+3t} &= -9\\
\mathrm{e}^{t} &= -9
\end{aligned}
$$

como não exite t que satisfaça essa igualdade não existem pontos de inflexão na função.

Para t = 0 a expressão (IX) fornece

$$
\begin{aligned}
x(0) &= 0{,}02\,\mathrm{e}^{-2.0}+0{,}08\,\mathrm{e}^{-3.0}\\
x(0) &= 0{,}02\,\mathrm{e}^{0}+0{,}08\,\mathrm{e}^{0}\\
x(0) &= 0{,}02+0{,}08\\
x(0) &= 0{,}1
\end{aligned}
$$

Como a variável t representa o tempo não tem sentido o cálculo de valores negativos ($t<0$), para t tendendo a infinito, temos

$$
\lim_{t\rightarrow\infty} x(t)=\lim_{t\rightarrow\infty} 0{,}02\,\mathrm{e}^{-2t}+0{,}08\,\mathrm{e}^{-3t}=\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{0{,}02}{\mathrm{e}^{2t}}+\frac{0{,}08}{\mathrm{e}^{3t}}=\frac{0{,}02}{\mathrm{e}^{2.\infty}}+\frac{0{,}08}{\mathrm{e}^{3.\infty}}=0+0=0
$$

Da análise feita acima traçamos o gráfico da posição em função do tempo mostrado na gráfico 1.

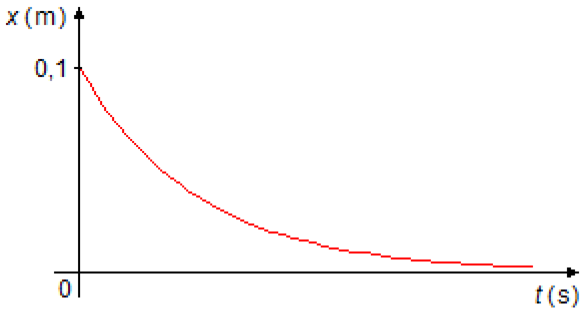


gráfico 1

Observação: *a função* $x(t)$, *expressão (IX), tem como domínio todos os números reais,* $D=\{\,t\in \mathbb{R}\,\}$ *, e não possui ponto de máximo, como visto na análise da primeira derivada. Quando consideramos a variável t como o tempo o domínio da função se restringe aos valores maiores ou iguais a zero,* $D=\{\,t\in \mathbb{R}\mid t\geqslant 0\,\}$ *, e neste caso há um ponto de máximo no extremo do intervalo em t* = 0*, x(* 0 *)* = 0,1*.*