Mostre que o momento angular de um sistema de duas partículas em relação a um ponto fixo qualquer é dado pela soma do momento angular do sistema em relação ao centro de massa e do momento angular, de uma partícula de massa $M=m_1+m_2$ concentrada no centro de massa do sistema se movendo com a velocidade do centro de massa, em relação ao mesmo ponto fixo. Generalize o resultado para um sistema de *n* de partículas.

Esquema do problema

O problema nos diz que queremos calcular "*...o momento angular de um sistema de duas partículas em relação a um ponto fixo qualquer...*", então fixamos um sistema de referência *S* nesse ponto. As partículas 1 e 2 terão suas posições determinadas no espaço pelos vetores $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ em relação a esse sistema (figura 1).

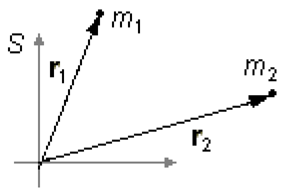


figura 1

O momento angular das partículas nesse sistema pode ser escrito como a soma de duas partes, a primeira é dada no problema como sendo, "*...do momento angular do sistema em relação ao centro de massa...*", assim fixamos um outro sistema de referência *S'* no centro de massa. As partículas 1 e 2 terão suas posições dadas pelos vetores $\mathbf{r}'_1$ e $\mathbf{r}'_2$ em relação a esse sistema (figura 2).

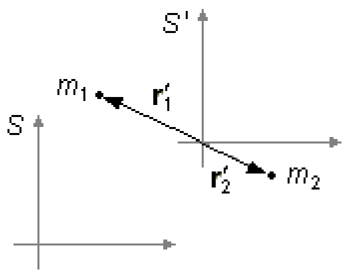


figura 2

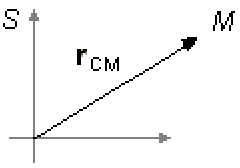


figura 3

A segunda parte seria *"...do momento angular, de uma partícula de massa $M=m_1+m_2$ concentrada no centro de massa do sistema se movendo com a velocidade do centro de massa, em relação ao mesmo ponto fixo."*, toda a massa do sistema estaria concentrada no centro de massa e este teria sua posição no espaço dado pelo vetor $\mathbf{r}_{CM}$ em relação ao referencial *S* (figura3).

Todos os elementos estão representados na figura 4, abaixo

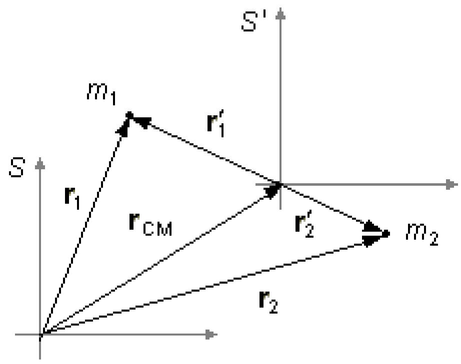


figura 4

Solução

Pela figura 4 os vetores $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ podem se escritos como

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_{CM}+\mathbf{r}'_1 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{r}_2=\mathbf{r}_{CM}+\mathbf{r}'_2 \tag{I}$$

Como a velocidade é dada por $\mathbf{v}=\dfrac{d\,\mathbf{r}}{d\,t}$, derivando as duas expressões de (I), temos

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_1 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v}_2=\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_2 \tag{II}$$

onde $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são as velocidades das partículas 1 e 2 em relação ao sistema S, $\mathbf{v}_{CM}$ é a velocidade do centro de massa em relação ao sistema *S* e $\mathbf{v}'_1$ e $\mathbf{v}'_2$ são as velocidades das partículas 1 e 2 em relação ao referencial *S'*.

O momento angular em relação à *S* é

$$\mathbf{L}=\mathbf{r_1}\times\mathbf{p_1}+\mathbf{r_2}\times\mathbf{p_2} \tag{III}$$

as quantidades de movimento $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ são

$$\mathbf{p}_1=m_1\mathbf{v}_1 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{p}_2=m_2\mathbf{v}_2 \tag{IV}$$

substituindo as expressões (IV) em (III)

$$\begin{gathered}\mathbf{L}=\mathbf{r_1}\times m_1\mathbf{v}_1+\mathbf{r_2}\times m_2\mathbf{v}_2\\ \mathbf{L}=m_1\mathbf{r_1}\times\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{r_2}\times\mathbf{v}_2\end{gathered} \tag{V}$$

substituindo (I) e (II) em (V), obtemos

$$\begin{gathered}\mathbf{L}=m_1\left(\mathbf{r}_{CM}+\mathbf{r}'_1\right)\times\left(\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_1\right)+m_2\left(\mathbf{r}_{CM}+\mathbf{r}'_2\right)\times\left(\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_2\right)\\ \mathbf{L}=m_1\left(\mathbf{r}_{CM}\times\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{r}_{CM}\times\mathbf{v}'_1+\mathbf{r}'_1\times\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{r}'_1\times\mathbf{v}'_1\right)+m_2\left(\mathbf{r}_{CM}\times\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{r}_{CM}\times\mathbf{v}'_2+\mathbf{r}'_2\times\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{r}'_2\times\mathbf{v}'_2\right)\\ \mathbf{L}=\mathbf{r}_{CM}\times m_1\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{r}_{CM}\times m_1\mathbf{v}'_1+\mathbf{r}'_1\times m_1\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{r}'_1\times m_1\mathbf{v}'_1+\\ +m_2\mathbf{r}_{CM}\times m_2\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{r}_{CM}\times m_2\mathbf{v}'_2+\mathbf{r}'_2\times m_2\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{r}'_2\times m_2\mathbf{v}'_2\\ \mathbf{L}=\mathbf{r}_{CM}\times\left(m_1+m_2\right)\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{r}_{CM}\times\left(m_1\mathbf{v}'_1+m_2\mathbf{v}'_2\right)+\left(m_1\mathbf{r}'_1+m_2\mathbf{r}'_2\right)\times\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{r}'_1\times m_1\mathbf{v}'_1+\mathbf{r}'_2\times m_2\mathbf{v}'_2\end{gathered}$$

Analisando os termos do lado direito da expressão acima, temos

- Primeiro termo $\mathbf{r}_{CM}\times\left(m_1+m_2\right)\mathbf{v}_{CM}=\mathbf{r}_{CM}\times M\,\mathbf{v}_{CM}$, será o momento angular de uma partícula de massa *M* localizada no centro de massa, se movendo com a velocidade do centro de massa, e posição dada pelo vetor $\mathbf{r}_{CM}$ em relação referencial *S* (terceira parte do enunciado do problema).

- Terceiro termo $\left(m_1\mathbf{r}'_1+m_2\mathbf{r}'_2\right)\times\mathbf{v}_{CM}$, multiplicando e dividindo o termo entre parênteses pela massa total do sistema, $M=m_1+m_2$, teremos

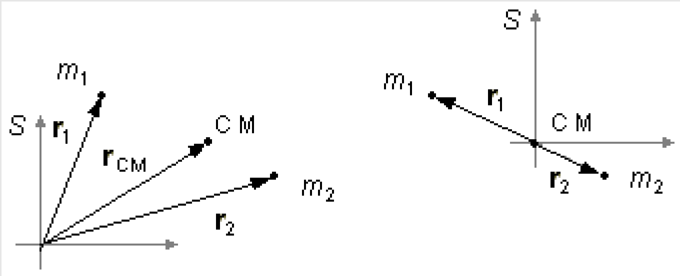
$$\left(m_1\mathbf{r}'_1+m_2\mathbf{r}'_2\right)\frac{M}{M}=M\frac{\left(m_1\mathbf{r}'_1+m_2\mathbf{r}'_2\right)}{M}=M\,\frac{\sum m_i\,\mathbf{r}'_i}{M}$$

onde o termo $\dfrac{\sum m_i\,\mathbf{r}'_i}{M}$ é a própria definição de centro de massa. Assim a posição do centro de massa no referencial do centro de massa é zero.

observação: *pela definição de centro de massa, o vetor posição de um sistema de partículas em relação a um referencial S é dado por* $\mathbf{r}_{CM}=\dfrac{\sum m_i\,\mathbf{r}_i}{M}$ *, para duas massas, em particular , temos*

$$\mathbf{r}_{CM}=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{M}$$

onde $\mathbf{r}_{CM}$ *é o vetor posição do centro de massa em relação ao referencial S e* $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ *são os vetores posição das partículas* m_1 e m_2 *no mesmo referencial.*



Se o referencial S for colocado na posição do centro de massa, os vetores posição $\mathbf{r}_1$ *e* $\mathbf{r}_2$ *serão indicados a partir desta posição e o vetor* $\mathbf{r}_{CM}$ *será zero.*

Isto é o que acontece com o segundo e terceiro termos da expressão do momento angular, os vetores indicados com linha estão no referencial S' que está no centro de massa, por isso estes termos são nulos.

- Segundo termo $\mathbf{r}_{CM}\times\left(m_1\,\mathbf{v}'_1+m_2\,\mathbf{v}'_2\right)$ é a velocidade do centro de massa no referencial do centro de massa que será zero.

- O Quarto e o Quinto $\mathbf{r}'_1\times m_1\,\mathbf{v}'_1+\mathbf{r}'_2\times m_2\,\mathbf{v}'_2$ termos representam o momento angular de um sistema de duas partículas em relação ao referencial *S*', ou seja é o momento angular do sistema em relação ao centro de massa (a segunda parte do enunciado), assim podemos escrever

$$\mathbf{L}_{CM}=\mathbf{r}'_1\times m_1\,\mathbf{v}'_1+\mathbf{r}'_2\times m_2\,\mathbf{v}'_2$$

Assim o momento angular pode ser escrito na forma pedida

$$\boxed{\mathbf{L}=\mathbf{L}_{CM}+\mathbf{r}_{CM}\times M\,\mathbf{v}_{CM}}$$

Generalizando para um sistema de *n* partículas, o vetor posição será escrito como

$$\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_{CM}+\mathbf{r}_i' \qquad i=1..n \tag{VI}$$

derivando em relação ao tempo as velocidades das partículas serão dadas por

$$\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}_i' \qquad i=1..n \tag{VII}$$

O momento angular é dado por

$$\mathbf{L}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i \tag{VIII}$$

a quantidade de movimento $\mathbf{p}_i$ é

$$\mathbf{p}_i=m_i\,\mathbf{v}_i \tag{IX}$$

substituindo (IX) em (VIII), vem

$$\mathbf{L}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i\times m_i\,\mathbf{v}_i \tag{X}$$

substituindo (VI) e (VII) em (X), temos

$$\mathbf{L}=\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{r}_{CM}+\mathbf{r}'_i\right)\times m_i\left(\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_i\right)$$

$$\mathbf{L}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_{CM}\times m_i\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{r}_{CM}\times m_i\mathbf{v'}_i+\mathbf{r'}_i\times m_i\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{r'}_i\times m_i\mathbf{v'}_i$$

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}_{CM}\times\mathbf{v}_{CM}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}m_i}_{M}+\mathbf{r}_{CM}\times\underbrace{\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{v'}_i}_{0}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{r'}_i}_{0}\times\mathbf{v}_{CM}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r'}_i\times m_i\mathbf{v'}_i}_{\mathbf{L}_{CM}}$$

Analisando os termos da expressão

- No primeiro termo o somatório representa a massa total do sistema. Assim este termo representa o momento angular do sistema, com toda a massa localizada no centro de massa, em relação ao referencial *S* e se movendo com a velocidade do centro de massa, ou seja

$$\mathbf{r}_{CM}\times\mathbf{v}_{CM}\sum_{i=1}^{n}m_i=\mathbf{r}_{CM}\times M\mathbf{v}_{CM}$$

- O segundo e o terceiro termos são nulos porque estão calculados em relação ao referencial *S’* que está fixo no centro de massa do sistema.

- O quarto termo representa o momento angular do sistema em relação ao referencial *S’*, temos que

$$\mathbf{L}_{CM}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r'}_i\times m_i\mathbf{v'}_i$$

Assim o momento angular em relação ao referencial *S* pode ser escrito como

$$\boxed{\mathbf{L}=\mathbf{L}_{CM}+\mathbf{r}_{CM}\times M\mathbf{v}_{CM}}$$