Um disco de raio *R* rola, sem deslizar, com velocidade angular ω constante ao longo de um plano horizontal, sendo que o centro da roda descreve uma trajetória retilínea. Suponha que, a partir de um instante $t=0$, um ponto na periferia da roda esteja na origem de um sistema de coordenadas ortogonais *Oxy*.
a) Determinar as equações paramétricas da trajetória, *i.e.*, determine *x* e *y* em função do tempo;
b) Determine os componentes da velocidade;
c) Determine os componentes da aceleração.

Observação: *i.e.* é abreviação da expressão em latim *istum est*, que significa isto é.

Dados do problema

- raio do disco: R;
- velocidade anglar: ω.

Esquema do problema

Vamos adotar um sistema de referência *O* fixo no solo com o ponto *P* do disco na origem do sistema e um outro sistema de referência *O'* com origem no centro do disco (figura 1-A).

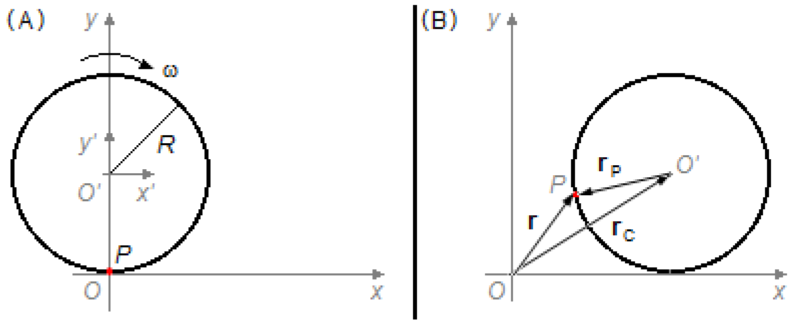

figura 1

O vetor **r** descreve a posição do ponto *P* em relação ao referencial *O* fixo, o vetor $\mathbf{r}_{\mathrm{C}}$ descreve a posição do centro do disco em relação ao referencial *O* e o vetor $\mathbf{r}_{\mathrm{P}}$ descreve a poiçaõ do ponto *P* em relação ao referencial *O'* que se desloca com o disco, assim

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{C}}+\mathbf{r}_{\mathrm{P}} \tag{I}$$

Solução

a) O vetor **r** é escrito como $\mathbf{r}=x\ \mathbf{i}+y\ \mathbf{j}$, onde *x* e *y* devem ser escritas em função do tempo, $x(t)$ e $y(t)$, que fornecem as equações paramétricas pedidas, **i** e **j** são os vetores unitários nas direções *x* e *y*.

O vetor $\mathbf{r}_{\mathrm{C}}$ é escrito como $\mathbf{r}_{\mathrm{C}}=x_{\mathrm{C}}\ \mathbf{i}+y_{\mathrm{C}}\ \mathbf{j}$ (figura 2), como a velocidade do disco é constante a ordenada do centro do disco descreve um *Movimento Retilíneo Uniforme* (*M.R.U.*) cuja equação é dada por

$$x_{\mathrm{C}}=x_{0\mathrm{C}}+v_{\mathrm{C}}t$$

no início o centro do disco está na origem do eixo *x* temos $x_{0\mathrm{C}}=0$ e v_{C} é o módulo a velocidade do centro do disco, então

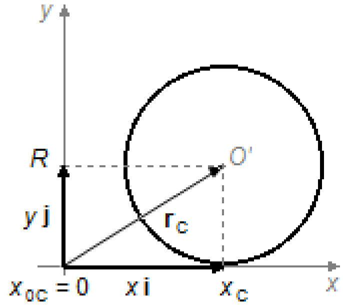

figura 2

$$x_{\mathrm{C}}=v_{\mathrm{C}}t$$

A abscissa do centro do disco é um valor constante dado pelo raio do disco, assim

$$y_{C}=R$$

podemos escrever

$$\mathbf{r}_{C}=v_{C}t\ \mathbf{i}+R\ \mathbf{j} \tag{II}$$

O vetor $\mathbf{r}_{P}$ pode ser decomposto nas direções x' e y' tomando-se como referência o sistema O' no centro do disco (figura 3-A), escrito como $\mathbf{r}_{P}=x_{P}\ \mathbf{i}+y_{P}\ \mathbf{j}$ temos

$$x_{P}=R\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y_{P}=R\,\text{sen}\theta$$

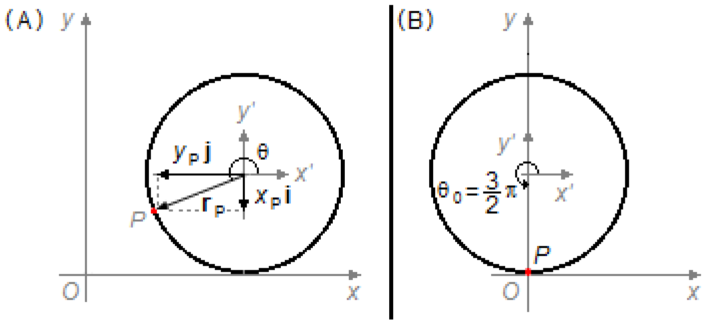

figura 3

como a velocidade angular do disco é constante o ponto P descreve um *Movimento Circular Uniforme* (*M.C.U.*) cuja equação é dada por

$$\theta=\theta_{0}-\omega t$$

o ângulo θ é medido a partir do eixo x positivo no sentido anti-horário, a posição angular inicial do ponto P é $\theta_{0}=\dfrac{3\pi}{2}$ em relação ao sistema de referência O' e a velocidade angular é negativa, pois o disco gira no sentido horário (figura 3-B), assim

$$\mathbf{r}_{P}=R\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\omega t\right)\mathbf{i}+R\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\omega t\right)\mathbf{j}$$

Observação: lembrando das propriedades da *Trigonometria*

$$\cos\left(a-b\right)=\cos a\cos b+\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$$

$$\text{sen}\left(a-b\right)=\text{sen}\,a\cos b-\text{sen}\,b\cos a$$

$$\mathbf{r}_{P}=R\left(\underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{0}\cos\omega t+\underbrace{\text{sen}\frac{3\pi}{2}}_{-1}\text{sen}\,\omega t\right)\mathbf{i}+R\left(\underbrace{\text{sen}\frac{3\pi}{2}}_{-1}\cos\omega t-\text{sen}\,\omega t\underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{0}\right)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_{P}=-R\,\text{sen}\,\omega t\ \mathbf{i}-R\cos\theta\ \mathbf{j} \tag{III}$$

Substituindo a definição de **r** e as expressões (II) e (III) em (I), obtemos

$$x\ \mathbf{i}+y\ \mathbf{j}=v_{C}t\ \mathbf{i}+R\ \mathbf{j}-R\,\text{sen}\,\omega t\ \mathbf{i}-R\cos\omega t\ \mathbf{j}$$

separando as componentes, temos

$$x=v_{C}\,t-R\operatorname{sen}\omega t \tag{IV}$$

$$y=R-R\cos\omega t$$

O vetor velocidade do centro do disco só possui componente na direção **i** escrito como $\mathbf{v}_{C}=v_{C}\,\mathbf{i}$, o vetor velocidade tangencial de um ponto do disco só possui componente na direção $\mathbf{e}_{\theta}$, este é o vetor unitário na direção de variação do ângulo (figura 4), e é escrito como $\mathbf{v}_{T}=-v_{T}\,\mathbf{e}_{\theta}$. Como o disco gira sem escorregamento os módulos das velocidades do centro do disco e tangencial devem ser iguais.

$$\left|\mathbf{v}_{C}\right|=\left|\mathbf{v}_{T}\right|$$
$$v_{C}=v_{T}$$

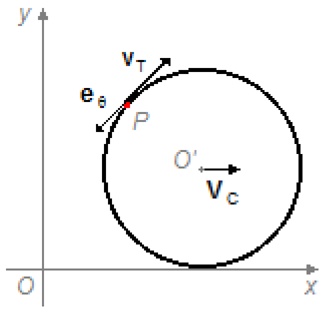

figura 4

Observação: o movimento do disco é a composição de dois movimentos, um movimento de translação em que a velocidade do centro do disco $\mathbf{v}_{C}$ e também de todos os pontos do disco (figura 5-A) e um movimento de rotação de todos os pontos do disco em torno do cento em que a velocidade é tangencial ao disco $\mathbf{v}_{T}$ (figura 5-B).

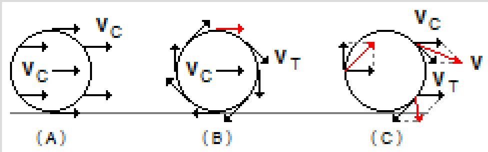

figura 5

A velocidade **v** dos pontos do disco é dada pela composição dessa duas velocidades (figura 5-C)

Dois vetores são iguais somente se seus módulos, direções e sentidos são iguais, os vetores $\mathbf{v}_{C}$ e $\mathbf{v}_{T}$ possuem direções e sentidos diferentes (o único ponto em que eles são iguais acontede quando o vetor tangencial está na posição superior do disco, em vermelho na figura 5-B). Como o problema diz que o disco se desloca sem deslizar podemos igualar seus módulos.

Se a velocidade do centro do disco fosse maior que a velocidade tangencial o disco iria girar devagar enquanto seria arrastado contra o solo, se a velocidade tangencial fosse maior que a velocidade do centro ele iria girar rápido, patinando equanto transladava pelo solo.

O módulo da velocidade tangencial é dado por $v_{T}=\omega R$, assim

$$v_{C}=\omega R \tag{V}$$

substituindo a expressão (V) em (IV), temos finalmente

$$x=\omega R t-R\operatorname{sen}\omega t$$

$$y=R-R\cos\omega t$$

$$\boxed{\begin{aligned}x(t)&=R\,(\,\omega t-\operatorname{sen}\omega t\,)\\ y(t)&=R\,(\,1-\cos\omega t\,)\end{aligned}}$$

Observação: a curva descrita pelas equações encontradas é mostrada na figura 6 abaixo, esta curva é chamada *cicloide*.

Os pontos P_{1}, P_{2}, P_{3}, P_{4} e P_{5} são alguns pontos do disco equanto ele se desloca descrevendo a trajetória.

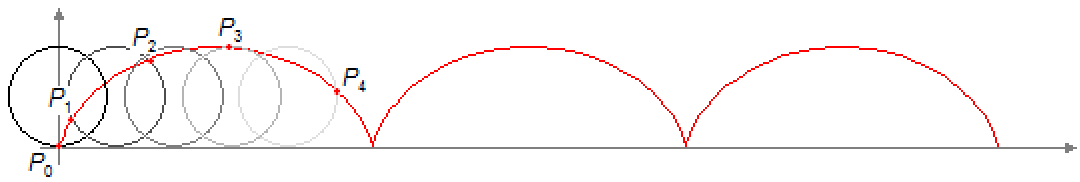

figura 6

b) As velocidades são dadas por

$$v_{x}(t)=\frac{d\,x(t)}{d\,t}\qquad \text{e} \qquad v_{y}(t)=\frac{d\,y(t)}{d\,t}$$

derivando as expressões obtidas no item (a) em relação ao tempo temos as velocidades $v_{x}(t)$ e $v_{y}(t)$.

derivada de $x(t)=R\,(\,\omega t-\operatorname{sen}\omega t\,)$

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t}=\frac{d\,[\,R\,(\,\omega t-\operatorname{sen}\omega t\,)\,]}{d\,t}$$

o raio R é constante e "sai" da derivada, sendo $g(t)=\omega t$ e $h(t)=\operatorname{sen}\omega t$, $\dfrac{d\,x(t)}{d\,t}=R\,\dfrac{d\,[\,g(t)-h(t)\,]}{d\,t}$, a derivada da diferença é a diferença das derivadas

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t}=R\left(\frac{d\,g(t)}{d\,t}-\frac{d\,h(t)}{d\,t}\right)$$

derivada de $g(t)=\omega t$

$$\frac{d\,g}{d\,t}=\omega \tag{VI}$$

derivada de $h(t)=\operatorname{sen}\omega t$, onde a função $h\,(\,t\,)$ é uma função composta cuja derivada, pela regra da cadeia, é do tipo

$$\frac{d\,h[u(t)]}{d\,t}=\frac{d\,h}{d\,u}\,\frac{d\,u}{d\,t}$$

com $h(u)=\operatorname{sen}u$ e $u(t)=\omega t$, $u(t)=g(t)$ já foi calculado acima, assim a derivada será

$$\frac{d\,h}{d\,u}=\cos u \tag{VII}$$

$$\frac{d\,h[u(t)]}{d\,t}=\omega\,\cos\omega t$$

assim

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t}=R\,(\,\omega-\omega\,\cos\omega t\,)$$

derivada de $y(t)=R\,(1-\cos\omega t)$

aplicando novamente a regra de que a derivada da diferença é a diferença das derivadas.

derivada de $g(t)=1$, a derivada de uma constante é nula

$$\frac{dg}{dt}=0 \qquad \text{(VIII)}$$

derivada de $h(t)=\cos\omega t$, onde a função $h(t)$ é uma função composta cuja derivada, pela regra da cadeia, é do tipo

$$\frac{dh[u(t)]}{dt}=\frac{dh}{du}\frac{du}{dt}$$

com $h(u)=\cos u$ e $u(t)=\omega t$, $u(t)=g(t)$ já foi calculado acima, assim a derivada será

$$\frac{dh}{du}=-\operatorname{sen} u \qquad \text{(IX)}$$

$$\frac{dh[u(t)]}{dt}=-\omega\operatorname{sen}\omega t$$

assim

$$\frac{dy(t)}{dt}=R\,[\,0-(-\omega\operatorname{sen}\omega t\,)]=R\omega\operatorname{sen}\omega t$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_x(t)&=R\omega\,(1-\cos\omega t)\\ v_y(t)&=R\omega\operatorname{sen}\omega t\end{aligned}}$$

c) As acelerações são dadas por

$$a_x(t)=\frac{dv_x(t)}{dt} \qquad \text{e} \qquad a_y(t)=\frac{dv_y(t)}{dt}$$

derivando as expressões obtidas no item (b) em relação ao tempo temos as velocidades $a_x(t)$ e $a_y(t)$.

derivada de $v_x(t)=R\omega\,(1-\cos\omega t)$

$$\frac{dv_x(t)}{dt}=\frac{d\,[\,R\omega\,(1-\cos\omega t\,)\,]}{dt}$$

o raio R e a velocidade angular ω são constantes e “saem” da derivada, sendo $g(t)=1$ e $h(t)=\cos\omega t$, $\dfrac{dv_x(t)}{dt}=R\omega\,\dfrac{d\,[\,g(t)-h(t)\,]}{dt}$, usando o valor para a derivada de $g(t)$ dado pela expressão (VIII) e valor da derivada de $h(t)$ dada pela expressão (IX), temos

$$\frac{dv_x(t)}{dt}=R\omega\,[\,0-(-\omega\operatorname{sen}\omega t\,)]=R\omega^2\operatorname{sen}\omega t$$

derivada de $v_y(t)=R\omega\ \text{sen}\,\omega t$

usando a derivada da função seno calculada acima dada pela expressão (VII), obtemos

$$\frac{d v_y(t)}{d t}=R\omega\ (\ \omega\cos\omega t\ )=R\omega^2\cos\omega t$$

$$\boxed{\begin{aligned}a_x(t)&=R\omega^2\ \text{sen}\,\omega t\\a_y(t)&=R\omega^2\cos\omega t\end{aligned}}$$