Um disco de raio *R* rola, sem deslizar, com velocidade angular ω constante ao longo de um plano horizontal, sendo que o centro da roda descreve uma trajetória retilínea. Suponha que, a partir de um instante $t=0$, um ponto na periferia da roda esteja na origem de um sistema de coordenadas ortogonais *Oxy*.
a) Determinar as equações paramétricas da trajetória, *i.e.*, determine *x* e *y* em função do tempo;
b) Determine os componentes da velocidade;
c) Determine os componentes da aceleração.

Observação: *i.e.* é abreviação da expressão em latim *istum est*, que significa isto é.

Dados do problema

- raio do disco: *R*;
- velocidade anglar: ω.

Esquema do problema

Vamos adotar um sistema de referência *O* fixo no solo com o ponto *P* do disco na origem do sistema e um outro sistema de referência *O'* com origem no centro do disco (figura 1).

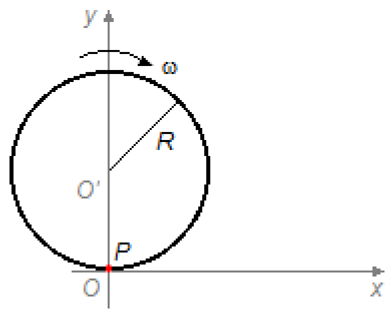

figura 1

Solução

a) As coordenadas *x* e *y* descrevem a posição do ponto *P* em relação ao referencial *O*, as coordenadas x_{C} e y_{C} descrevem a posição do centro do disco em relação ao referencial *O* (figura 2-A) e as coordenadas x_{P} e y_{P} descrevem a posição do ponto *P* em relação ao referencial *O'* que se desloca com o disco (figura 2-B)

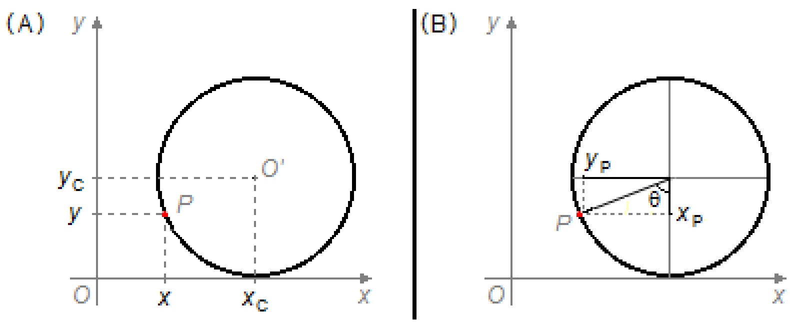

figura 2

Assim os pontos *x* e *y* são dados por

$$x=x_{\text{C}}-x_{\text{P}} \qquad \text{e} \qquad y=y_{\text{C}}-y_{\text{P}} \tag{I}$$

Observação: no referencial *O'* o ângulo θ é medido a partir do eixo *y* negativo no sentido horário, ao contrário do que se faz usualmente quando o ângulo θ é medido a partir do eixo *x* positivo no sentido anti-horário, assim no 3.º quadrante os valores do seno e cosseno são positivos e por isso devemos introduzir o sinal negativo nas expressões (I).

A velocidade do disco é constante a ordenada do centro do disco descreve um *Movimento Retilíneo Uniforme* (*M.R.U.*) cuja equação é dada por

$$x_{\text{C}}=x_{0\text{C}}+v_{\text{C}}\,t$$

no início o centro do disco está na origem do eixo *x* temos $x_{0\text{C}}=0$ e v_{C} é o módulo a velocidade do centro do disco, então

$$x_{\text{C}}=v_{\text{C}}\,t \qquad \text{(II)}$$

A abscissa do centro do disco é um valor constante dado pelo raio do disco, assim

$$y_{\text{C}}=R \qquad \text{(III)}$$

A posição do ponto *P* em relação ao referencial *O'* pode ser descrita pelas suas componentes

$$x_{\text{P}}=R\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y_{\text{P}}=R\,\text{sen}\theta \qquad \text{(IV)}$$

como a velocidade angular do disco é constante o ponto *P* descreve um *Movimento Circular Uniforme* (*M.C.U.*) cuja equação é dada por

$$\theta=\theta_{0}+\omega t$$

o valor inicial do ângulo θ é nulo ($\theta_{0}=0$) em relação ao sistema de referência *O'*

$$\theta=\omega t \qquad \text{(V)}$$

assim substituindo as expressões (II), (III), (IV) e (V) nas expressões de (I), temos

$$x=v_{\text{C}}\,t-R\,\text{sen}\,\omega t \qquad \text{(VI)}$$

$$y=R-R\cos\omega t$$

Como o disco gira sem escorregamento os módulos das velocidades do centro do disco e tangencial devem ser iguais.

$$v_{\text{C}}=v_{\text{T}}$$

Observação: o movimento do disco é a composição de dois movimentos, um movimento de translação em que a velocidade do centro do disco $\mathbf{v}_{\text{C}}$ e também de todos os pontos do disco (figura 3-A) e um movimento de rotação de todos os pontos do disco em torno do cento em que a velocidade é tangencial ao disco $\mathbf{v}_{\text{T}}$ (figura 3-B).

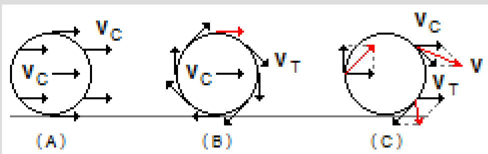

figura 3

A velocidade **v** dos pontos do disco é dada pela composição dessa duas velocidades (figura 3-C)

Dois vetores são iguais somente se seus módulos, direções e sentidos são iguais, os vetores $\mathbf{v}_{\text{C}}$ e $\mathbf{v}_{\text{T}}$ possuem direções e sentidos diferentes (o único ponto em que eles são iguais acontede quando o vetor tangencial está na posição superior do disco, em vermelho na figura 3-B). Como o problema diz que o disco se desloca sem deslizar podemos igualar seus módulos.

Se a velocidade do centro do disco fosse maior que a velocidade tangencial o disco iria girar devagar enquanto seria arrastado contra o solo, se a velocidade tangencial fosse maior que a velocidade do centro ele iria girar rápido patinando equanto transladava pelo solo.

O módulo da velocidade tangencial é dado por $v_{\text{T}}=\omega R$, assim

$$v_C=\omega R \tag{VII}$$

substituindo a expressão (VII) em (VI), temos finalmente

$$x=\omega Rt-R\,\operatorname{sen}\omega t$$

$$y=R-R\cos\omega t$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t)=R\,(\,\omega t-\operatorname{sen}\omega t\,)\\ y(t)=R\,(\,1-\cos\omega t\,)\end{array}}$$

Observação: a curva descrita pelas equações encontradas é mostrada na figura 4 abaixo, esta curva é chamada *cicloide*.

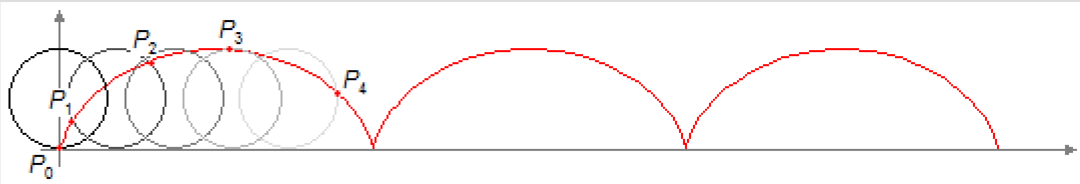

figura 4

Os pontos P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 são alguns pontos do disco equanto ele se desloca descrevendo a trajetória.

b) As velocidades são dadas por

$$v_x(t)=\frac{dx(t)}{dt} \qquad \text{e} \qquad v_y(t)=\frac{dy(t)}{dt}$$

derivando as expressões obtidas no item (a) em relação ao tempo temos as velocidades $v_x(t)$ e $v_y(t)$.

derivada de $x(t)=R\,(\,\omega t-\operatorname{sen}\omega t\,)$

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{d\,[\,R\,(\,\omega t-\operatorname{sen}\omega t\,)\,]}{dt}$$

o raio R é constante e “sai” da derivada, sendo $g(t)=\omega t$ e $h(t)=\operatorname{sen}\omega t$, $\dfrac{dx(t)}{dt}=R\,\dfrac{d\,[\,g(t)-h(t)\,]}{dt}$, a derivada da diferença é a diferença das derivadas

$$\frac{dx(t)}{dt}=R\left(\frac{dg(t)}{dt}-\frac{dh(t)}{dt}\right)$$

derivada de $g(t)=\omega t$

$$\frac{dg}{dt}=\omega \tag{VIII}$$

derivada de $h(t)=\operatorname{sen}\omega t$, onde a função $h\,(\,t\,)$ é uma função composta cuja derivada, pela regra da cadeia, é do tipo

$$\frac{dh[u(t)]}{dt}=\frac{dh}{du}\frac{du}{dt}$$

com $h(u)=\operatorname{sen}u$ e $u(t)=\omega t$, $u(t)=g(t)$ já foi calculado acima, assim a derivada será

$$\frac{dh}{du}=\cos u \tag{IX}$$

$$\frac{dh[u(t)]}{dt}=\omega\cos\omega t$$

assim

$$\frac{dx(t)}{dt}=R\,(\omega-\omega\cos\omega t\,)$$

derivada de $y(t)=R\,(\,1-\cos\omega t\,)$

aplicando novamente a regra de que a derivada da diferença é a diferença das derivadas.

derivada de $g(t)=1$, a derivada de uma constante é nula

$$\frac{dg}{dt}=0 \tag{X}$$

derivada de $h(t)=\cos\omega t$, onde a função $h\,(t)$ é uma função composta cuja derivada, pela regra da cadeia, é do tipo

$$\frac{dh[u(t)]}{dt}=\frac{dh}{du}\frac{du}{dt}$$

com $h(u)=\cos u$ e $u(t)=\omega t$, $u(t)=g(t)$ já foi calculado acima, assim a derivada será

$$\frac{dh}{du}=-\operatorname{sen}u \tag{XI}$$

$$\frac{dh[u(t)]}{dt}=-\omega\operatorname{sen}\omega t$$

assim

$$\frac{dy(t)}{dt}=R\,[\,0-(\,-\omega\operatorname{sen}\omega t\,)]=R\omega\operatorname{sen}\omega t$$

$$\boxed{\begin{aligned}v_x(t)&=R\omega\,(\,1-\cos\omega t\,)\\ v_y(t)&=R\omega\operatorname{sen}\omega t\end{aligned}}$$

c) As acelerações são dadas por

$$a_x(t)=\frac{dv_x(t)}{dt} \qquad \text{e} \qquad a_y(t)=\frac{dv_y(t)}{dt}$$

derivando as expressões obtidas no item (b) em relação ao tempo temos as velocidades $a_x(t)$ e $a_y(t)$.

derivada de $v_x(t)=R\omega\,(1-\cos\omega t)$

$$\frac{d\,v_x(t)}{d\,t}=\frac{d\,[\,R\omega\,(1-\cos\omega t)\,]}{d\,t}$$

o raio R e a velocidade angular ω são constantes e "saem" da derivada, sendo $g(t)=1$ e $h(t)=\cos\omega t$, $\dfrac{d\,v_x(t)}{d\,t}=R\omega\,\dfrac{d\,[\,g(t)-h(t)\,]}{d\,t}$, usando o valor para a derivada de $g(t)$ dado pela expressão (X) e valor da derivada de $h(t)$ dada pela expressão (XI), temos

$$\frac{d\,v_x(t)}{d\,t}=R\omega\,[\,0-(\,-\omega\,\operatorname{sen}\omega t\,)]=R\omega^2\operatorname{sen}\omega t$$

derivada de $v_y(t)=R\omega\,\operatorname{sen}\omega t$

usando a derivada da função seno calculada acima dada pela expressão (IX), obtemos

$$\frac{d\,v_y(t)}{d\,t}=R\omega\,(\,\omega\cos\omega t\,)=R\omega^2\cos\omega t$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_x(t)=R\omega^2\operatorname{sen}\omega t\\ a_y(t)=R\omega^2\cos\omega t\end{array}}$$