Uma partícula que descreve uma trajetória circular de raio r e submetida a uma aceleração angular α. Determinar:
a) A aceleração total da partícula;
b) O que acontece se a componente da aceleração na direção tangencial for zero?
c) O que acontece se a componente da aceleração na direção centrípeta for zero?

Dados do problema

- raio da trajetória: r;
- aceleração angular da partícula α.

Esquema do Problema

Adotando-se um sistema de coordenadas cilíndricas, onde $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ e $\mathbf{e}_z$ são os vetores unitários das direções r, φ e z respectivamente (figura 1-B)

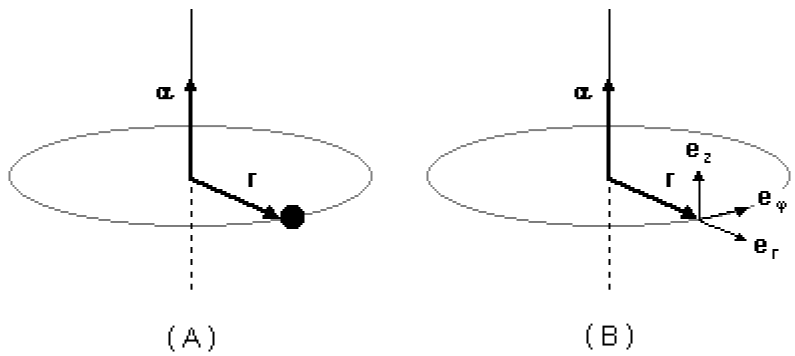

figura 1

O vetor posição só possui componente na direção $\mathbf{e}_r$, portanto, pode ser escrito como $\mathbf{r}=r\,\mathbf{e}_r$ e o vetor aceleração angular só possui componente na direção $\mathbf{e}_z$, então, pode ser escrito como $\boldsymbol{\alpha}=\alpha\,\mathbf{e}_z$.

Solução

a) Uma das componentes da aceleração será dada pelo produto vetorial entre o vetor aceleração angular ($\boldsymbol{\alpha}$) e o vetor posição ($\mathbf{r}$), figura 2-A

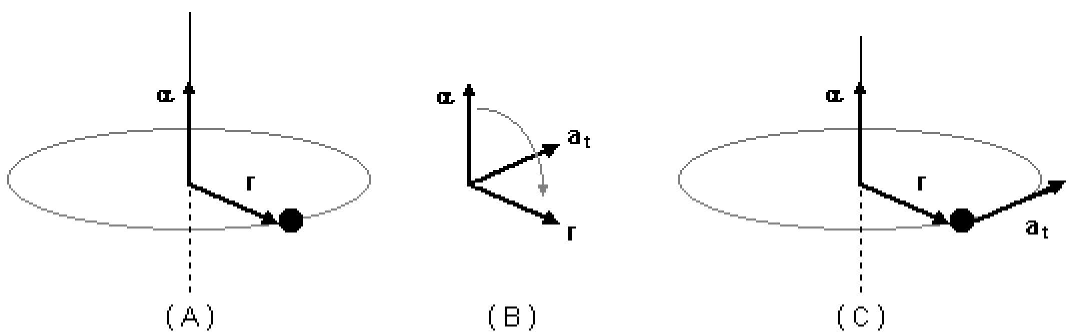

figura 2

$$\mathbf{a}_t=\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z\\ 0 & 0 & \alpha\\ r & 0 & 0\end{vmatrix}=\left(0.0-\alpha.0\right)\mathbf{e}_r-\left(0.0-\alpha.r\right)\mathbf{e}_\varphi+\left(0.0-0.r\right)\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a}_t=\alpha\,r\,\mathbf{e}_\varphi$$

O vetor $\mathbf{a}_{t}$ é perpendicular a $\boldsymbol{\alpha}$ e $\mathbf{r}$, figura 2-B, e tangente à trajetória da partícula em cada ponto, figura 2-C, esta é a aceleração tangencial.

Os vetores $\boldsymbol{\alpha}$ e $\mathbf{r}$ são perpendiculares entre si, portanto, em módulo temos

$$
\begin{aligned}
v &= \omega\, r \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\\
v &= \omega\, r
\end{aligned}
\tag{II}
$$

A partícula girando com aceleração angular α possui uma velocidade angular ω, esta velocidade esta na mesma direção e sentido da aceleração angular, então pode ser escrita como $\boldsymbol{\omega}=\omega\,\mathbf{e}_{z}$. A outra componente da aceleração será dada por

$$\mathbf{a}_{cp}=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

O produto vetorial $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ é uma velocidade, assim

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_{r} & \mathbf{e}_{\varphi} & \mathbf{e}_{z}\\ 0 & 0 & \omega\\ r & 0 & 0\end{vmatrix}=(0.0-\omega.0)\,\mathbf{e}_{r}-(0.0-\omega.r)\,\mathbf{e}_{\varphi}+(0.0-0.r)\,\mathbf{e}_{z}$$

$$\mathbf{v}=\omega\, r\,\mathbf{e}_{\varphi}$$

temos o vetor velocidade **v**, figura 3-B.

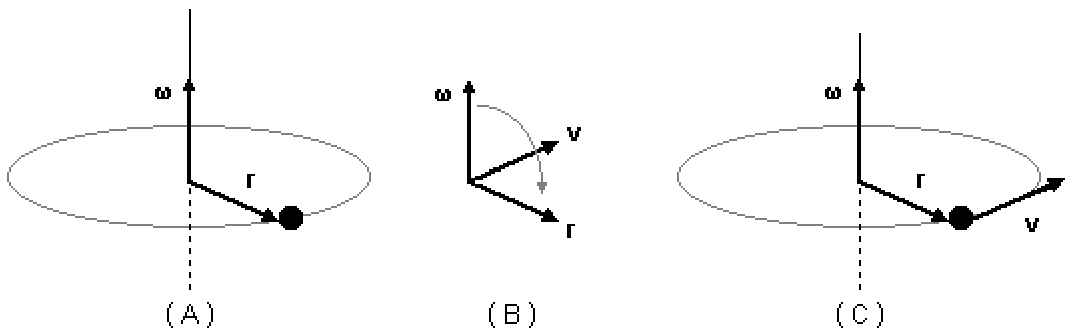

figura 3

Este vetor é tangente à trajetória da partícula em cada ponto, figura 3-C, em módulo temos que

$$
\begin{aligned}
v &= \omega\, r \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\\
v &= \omega\, r
\end{aligned}
\tag{II}
$$

Esta componente da aceleração pode ser escrita como

$$\mathbf{a}_{cp}=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$$

$$\mathbf{a}_{cp}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_{r} & \mathbf{e}_{\varphi} & \mathbf{e}_{z}\\ 0 & 0 & \omega\\ 0 & \omega r & 0\end{vmatrix}=\left(0.0-\omega^{2}\, r\right)\mathbf{e}_{r}-(0.0-\omega.0)\,\mathbf{e}_{\varphi}+(0.\omega\, r-0.0)\,\mathbf{e}_{z}$$

$$\mathbf{a}_{cp}=-\omega^{2}\, r\,\mathbf{e}_{r}$$

O vetor aceleração centrípeta está na direção radial e o sinal negativo indica que o sentido é oposto ao vetor unitário $\mathbf{e}_{r}$, figura 4-B

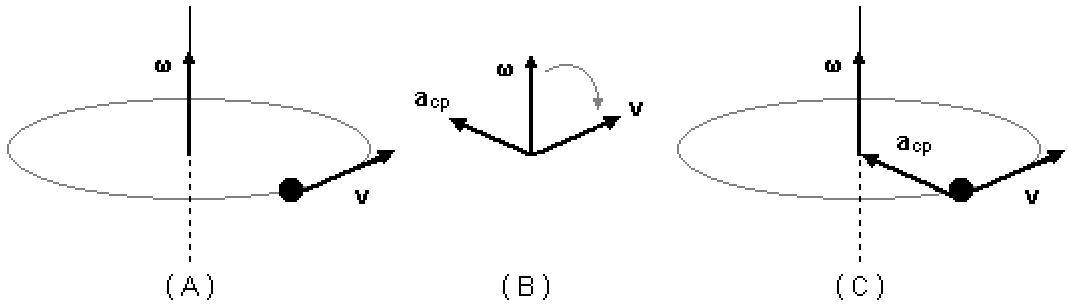

figura 4

Em módulo a aceleração centrípeta vale

$$a_{cp}=\omega^{2}\,r \tag{III}$$

A aceleração total da partícula será dada pela soma das componentes centrípeta e tangencial

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_{cp}+\mathbf{a}_{t}$$

Usando o *Teorema de Pitágoras* e as expressões (I) e (III), temos pela figura 5

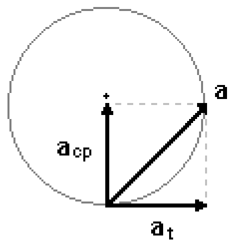

figura 5

$$\begin{gathered}a^{2}=a^{2}{}_{cp}+a^{2}{}_{t}\\ a^{2}=(\alpha\,r)^{2}+\left(\omega^{2}\,r\right)^{2}\\ a^{2}=\alpha^{2}\,r^{2}+\omega^{4}\,r^{2}\\ a^{2}=r^{2}\left(\alpha^{2}+\omega^{4}\right)\\ a=\sqrt{r^{2}\left(\alpha^{2}+\omega^{4}\right)}\end{gathered}$$

$$\boxed{a=r\,\sqrt{\alpha^{2}+\omega^{4}}}$$

b) A componente tangencial da aceleração é responsável pela alteração do **módulo** da velocidade tangencial, se a aceleração tangencial for nula a velocidade tangencial é constante. A aceleração total coincide com a aceleração centrípeta e a partícula gira em *Movimento Circular Uniforme* (*M.C.U.*)

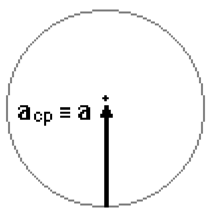

figura 6

c) A componente centrípeta da aceleração é responsável pela alteração da **direção** da partícula, se a aceleração centrípeta for nula a partícula não faz a curva, ela “sai” pela tangente. A aceleração total coincide com a aceleração tangencial e a partícula está em *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado* (*M.R.U.V.*)

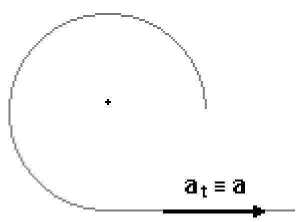

figura 7