Uma partícula que descreve uma trajetória circular de raio r e submetida a uma aceleração angular α. Determinar:
a) A aceleração total da partícula;
b) O que acontece se a componente da aceleração na direção tangencial for zero?
c) O que acontece se a componente da aceleração na direção centrípeta for zero?

Dados do problema

- raio da trajetória: r;
- aceleração angular da partícula α.

Esquema do Problema

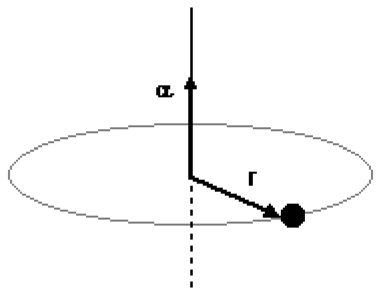

figura 1

Solução

a) Uma das componentes da aceleração será dada pelo produto vetorial entre o vetor aceleração angular (**α**) e o vetor posição (**r**), figura 2-A

$$\mathbf{a}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}$$

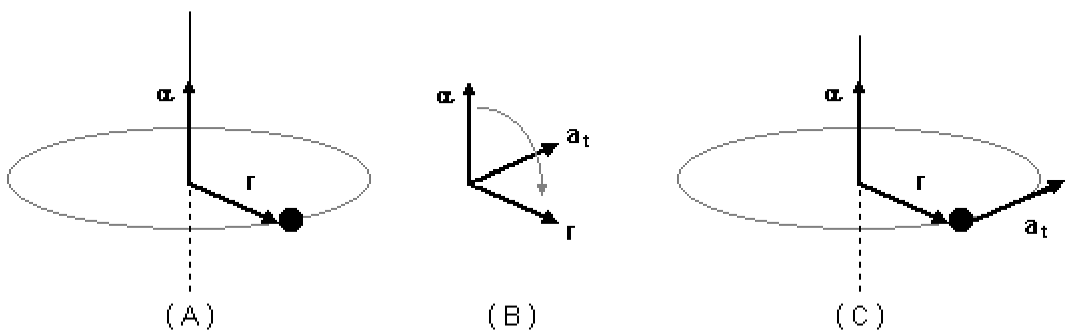

figura 2

Aplicando a regra da mão direita para o produto vetorial (levando o vetor **α** em direção ao vetor **r**) obtemos o vetor $\mathbf{a}_{\mathrm{t}}$ perpendicular a estes dois, figura 2-B. Este vetor é tangente à trajetória da partícula em cada ponto, figura 2-C, esta é a aceleração tangencial.

Os vetores **α** e **r** são perpendiculares entre si, portanto, em módulo temos

$$a_{\mathrm{t}}=\alpha\, r \,\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$$

$$a_{\mathrm{t}}=\alpha\, r \qquad \text{(I)}$$

A partícula girando com aceleração angular α possui uma velocidade angular ω, então outra componente da aceleração será dada por

$$\mathbf{a}_{cp}=\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right)$$

O produto vetorial $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ é uma velocidade, assim, aplicando a regra da mão direita (levando o vetor $\boldsymbol{\omega}$ em direção ao vetor **r**), temos o vetor velocidade **v**, figura 3-B.

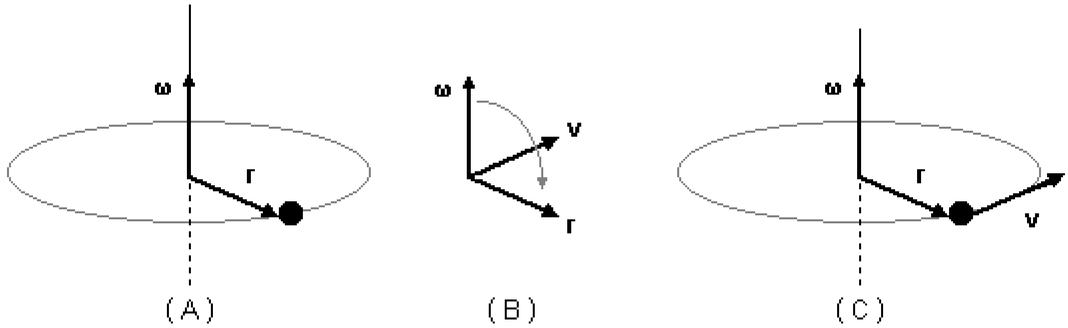

figura 3

Este vetor é tangente à trajetória da partícula em cada ponto, figura 3-C, em módulo temos que

$$v=\omega\, r\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$$
$$v=\omega\, r \qquad \text{(II)}$$

Esta componente da aceleração pode ser escrita como

$$\mathbf{a}_{cp}=\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right)=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$$

Fazendo o produto vetorial (levando o vetor ω em direção ao vetor v), figura 4-B, obtemos um vetor perpendicular a estes e apontado no sentido do centro da trajetória, esta é a aceleração centrípeta.

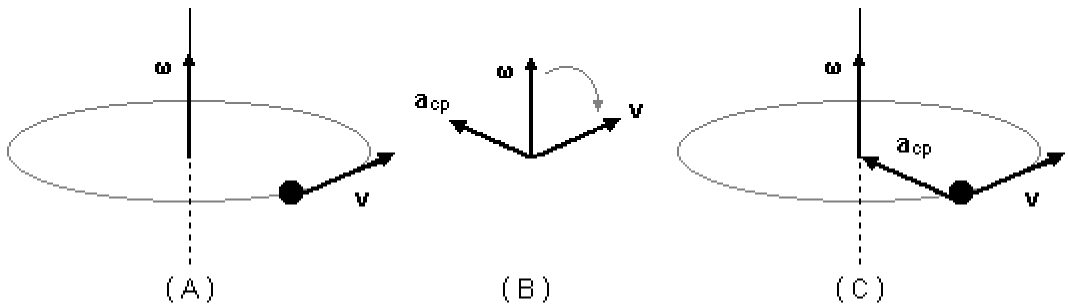

figura 4

Os vetores $\boldsymbol{\omega}$ e **v** são perpendiculares, portanto, em módulo temos

$$a_{cp}=\omega\, v\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$$
$$a_{cp}=\omega\, v$$

substituindo a expressão (II) para a velocidade na expressão acima, obtemos

$$a_{cp}=\omega^{2}\, r \qquad \text{(III)}$$

A aceleração total da partícula será dada pela soma das componentes centrípeta e tangencial

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_{cp}+\mathbf{a}_{t}$$

Usando o *Teorema de Pitágoras* e as expressões (I) e (III), temos pela figura 5

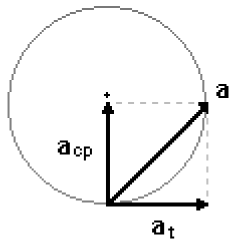

figura 5

$$a^{2}=a_{cp}^{2}+a_{t}^{2}$$

$$a^{2}=(\alpha\, r)^{2}+\left(\omega^{2}\, r\right)^{2}$$

$$a^{2}=\alpha^{2}\, r^{2}+\omega^{4}\, r^{2}$$

$$a^{2}=r^{2}\left(\alpha^{2}+\omega^{4}\right)$$

$$a=\sqrt{r^{2}\left(\alpha^{2}+\omega^{4}\right)}$$

$$\boxed{a=r\sqrt{\alpha^{2}+\omega^{4}}}$$

b) A componente tangencial da aceleração é responsável pela alteração do **módulo** da velocidade tangencial, se a aceleração tangencial for nula a velocidade tangencial é constante. A aceleração total coincide com a aceleração centrípeta e a partícula gira em *Movimento Circular Uniforme* (*M.C.U.*)

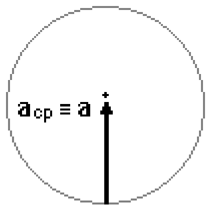

figura 6

c) A componente centrípeta da aceleração é responsável pela alteração da **direção** da partícula, se a aceleração centrípeta for nula a partícula não faz a curva, ela "sai" pela tangente. A aceleração total coincide com a aceleração tangencial e a partícula está em *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado* (*M.R.U.V.*)

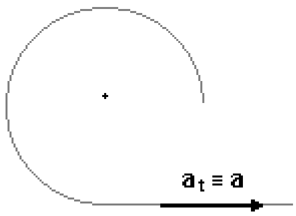

figura 7