Para um móvel em *Movimento Circular Uniformemente Variado* obtenha as expressões para o cálculo da velocidade angular e do espaço angular percorrido em função do tempo

Solução

Sendo $\alpha=\dfrac{d\omega}{dt}$, com a aceleração angular α constante, no *Movimento Circular Uniformemente Variado* integramos esta expressão em dt de ambos os lados e obtemos

$$\int\frac{d\omega'}{dt'}dt'=\int\alpha\,dt'$$

como a aceleração angular α é constate ela "sai" da integral, sendo $\dfrac{d\omega'}{dt'}dt'=d\omega'$ e os limites de integração que vão de ω_0, velocidade inicial, até $\omega(t)$, a velocidade num instante *t* qualquer para $d\omega'$ e de t_0, instante inicial, até *t*, um instante qualquer para dt'

$$\int_{\omega_0}^{\omega(t)}d\omega'=\alpha\int_{t_0}^{t}dt'$$

$$\omega'\Big|_{\omega_0}^{\omega(t)}=\alpha.t'\Big|_{t_0}^{t}$$

$$\omega(t)-\omega_0=\alpha\,(t-t_0)$$

$$\boxed{\omega(t)=\omega_0+\alpha\,(t-t_0)}$$

que é a expressão da velocidade angular para um corpo em *Movimento Circular Uniformemente Variado*.

Escrevendo $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$ e substituindo na expressão da velocidade temos

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega_0+\alpha\,(t-t_0)$$

integrando esta expressão em dt de ambos os lados, temos

$$\int\frac{d\theta'}{dt'}dt'=\int\left[\omega_0+\alpha\,(t'-t_0)\right]dt'$$

na integral do lado esquerdo $\dfrac{d\theta'}{dt'}dt'=d\theta'$ e no lado direito da igualdade a integral da soma é a soma das integrais, e como ω_0, t_0 e α são constantes elas “saem” da integral, os limites de integração vão de θ_0, espaço inicial, até $\theta(t)$, o espaço num instante *t* qualquer para $d\theta'$ e de t_0, instante inicial, até *t*, um instante qualquer para dt'

$$\int_{\theta_0}^{\theta(t)}d\theta'=\omega_0\int_{t_0}^{t}dt'+\alpha\int_{t_0}^{t}t\,dt'-\alpha\,t_0\int_{t_0}^{t}dt'$$

$$\theta'\Big|_{\theta_0}^{\theta(t)}=\omega_0\,t'\Big|_{t_0}^{t}+\alpha\,\frac{t'^2}{2}\Bigg|_{t_0}^{t}-\alpha.t_0\,t'\Big|_{t_0}^{t}$$

$$\theta(t)-\theta_0=\omega_0\,(t-t_0)+\alpha\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t_0^2}{2}\right)-\alpha\,t_0\,(t-t_0)$$

$$\theta(t)=\theta_0+\omega_0\,(t-t_0)+\alpha\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t_0^2}{2}-t_0\,t+t_0^2\right)$$

$$\theta(t)=\theta_0+\omega_0\,(t-t_0)+\alpha\left(\frac{t^2}{2}-t_0\,t+\frac{t_0^2}{2}\right)$$

$$\theta(t)=\theta_0+\omega_0\,(t-t_0)+\frac{\alpha}{2}\left(t^2-2t_0\,t+t_0^2\right)$$

$$\boxed{\theta(t)=\theta_0+\omega_0\,(t-t_0)+\frac{\alpha}{2}\,(t-t_0)^2}$$

que é a expressão do espaço para um corpo em *Movimento Circular Uniformemente Variado.*