Para um móvel em *Movimento Circular Uniformemente Variado* obtenha as expressões para o cálculo da velocidade angular e do espaço angular percorrido em função do tempo

Solução

Sendo $\alpha=\dfrac{d\omega}{dt}$, com a aceleração angular α constante, no *Movimento Circular Uniformemente Variado*, integramos esta expressão em dt de ambos os lados e obtemos

$$\int\frac{d\omega'}{dt'}dt'=\int\alpha\,dt'$$

como a aceleração angular α é constante ela "sai" da integral e sendo $\dfrac{d\omega'}{dt'}dt'=d\omega'$ fazemos

$$\begin{gathered}\int d\omega'=\alpha\int dt'\\ \omega(t)+C'_1=\alpha\,t+C''_1\\ \omega(t)=\alpha\,t+C''_1-C'_1\end{gathered}$$

C'_1 e C''_1 são constantes de integração que podem ser definidas em função de uma nova constante $C_1=C''_1-C'_1$

$$\omega(t)=\alpha\,t+C_1 \tag{I}$$

adotando a condição de que no instante inicial, t_0, o móvel esteja com velocidade angular inicial ω_0, temos a condição inicial $\omega(t_0)=\omega_0$, substituindo em (I)

$$\begin{gathered}\omega(t_0)=\alpha\,t_0+C_1\\ \omega_0=\alpha\,t_0+C_1\\ C_1=\omega_0-\alpha.t_0 \qquad \text{(II)}\end{gathered}$$

substituindo (II) em (I), temos

$$\omega(t)=\alpha\,t+\omega_0-\alpha\,t_0$$

$$\boxed{\omega(t)=\omega_0+\alpha\,(t-t_0)}$$

que descreve a velocidade angular de um corpo em *Movimento Circular Uniformemente Variado*.

Escrevendo $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$ e substituindo na expressão da velocidade temos

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega_0+\alpha\,(t-t_0)$$

integrando esta expressão em dt de ambos os lados, temos

$$\int \frac{d\theta'}{dt'}dt' = \int \left[\omega_0 + a.\left(t' - t_0\right)\right]dt'$$

na integral do lado esquerdo $\dfrac{d\theta'}{dt'}dt' = d\theta'$ e no lado direito da igualdade a integral da soma é a soma das integrais, e como ω_0 , t_0 e α são constantes elas "saem" da integral, então

$$\int d\theta' = \omega_0 \int dt' + \alpha \int t\,dt' - \alpha.t_0 \int dt'$$

$$\theta(t) + C_2^{\mathrm{I}} = \omega_0 t + C_2^{\mathrm{II}} + \alpha\frac{t^2}{2} + C_2^{\mathrm{III}} - \alpha.t_0 t + C_2^{\mathrm{IV}}$$

$$\theta(t) = \omega_0 t + C_2^{\mathrm{II}} + \alpha\frac{t^2}{2} + C_2^{\mathrm{III}} - \alpha.t_0 t + C_2^{\mathrm{IV}} - C_2^{\mathrm{I}}$$

C_2^{I} , C_2^{II} , C_2^{III} e C_2^{IV} são constantes de integração que podem ser definidas em função de uma nova constante $C_2 = C_2^{\mathrm{II}} + C_2^{\mathrm{III}} - C_2^{\mathrm{IV}} - C_2'^{\mathrm{I}}$

$$\theta(t) = \omega_0 t + \frac{\alpha}{2}.\left(t^2 - 2t_0 t\right) + C_2$$

no lado direito, no termo entre parênteses, somamos e subtraímos t_0^2

$$\theta(t) = \omega_0 t + \frac{\alpha}{2}.\left(t^2 - 2t_0 t + t_0^2 - t_0^2\right) + C_2$$

$$\theta(t) = \omega_0 t + \frac{\alpha}{2}.\left(t - t_0\right)^2 - \frac{\alpha}{2}t_0^2 + C_2 \qquad \text{(III)}$$

adotando a condição de que no instante inicial, t_0 , o móvel esteja na posição inicial θ_0 , temos a condição inicial $\theta\left(t_0\right) = \theta_0$, substituindo em (III)

$$\theta\left(t_0\right) = \omega_0 t_0 + \frac{\alpha}{2}\left(t_0 - t_0\right)^2 - \frac{\alpha}{2}t_0^2 + C_2$$

$$C_2 = \theta\left(t_0\right) - \omega_0 t_0 + \frac{\alpha}{2}0 + \frac{\alpha}{2}t_0^2$$

$$C_2 = \theta_0 - \omega_0 t_0 + \frac{\alpha}{2}t_0^2 \qquad \text{(IV)}$$

substituindo (IV) em (III), obtemos

$$\theta(t) = \omega_0 t + \frac{\alpha}{2}.\left(t - t_0\right)^2 - \frac{\alpha}{2}t_0^2 + \theta_0 - \omega_0 t_0 + \frac{\alpha}{2}t_0^2$$

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega_0.\left(t - t_0\right)^2 + \frac{\alpha}{2}.\left(t - t_0\right)^2}$$

que é a expressão do espaço para um corpo em *Movimento Circular Uniformemente Variado.*