Considere dois planos paralelos, um carregado com carga $+q$ e outro com carga $-q$ de densidades constantes. Determine o módulo do campo elétrico para pontos entre os dois planos e para pontos fora dos planos.

Dados do problema

- carga do plano 1: $+q$;
- carga do plano 2: $-q$.

Esquema do problema

As cargas positivas geram um campo elétrico de afastamento da placa ($\mathbf{E}_{+}$) na direção vertical e com sentido para cima na face superior da placa e com sentido para baixo na face inferior, as cargas negativas geram um campo elétrico de aproximação da placa ($\mathbf{E}_{-}$) na direção vertical e com sentido para baixo na face superior da placa e com sentido para cima na face inferior (figura 1-A).

Vamos adotar um sistema de referência com o vetor unitário **k** para "fora" da placa, no mesmo sentido do campo elétrico para a placa carregada positivamente e com sentido contrário ao campo para a placa carregada negativamente (figura 1-B).

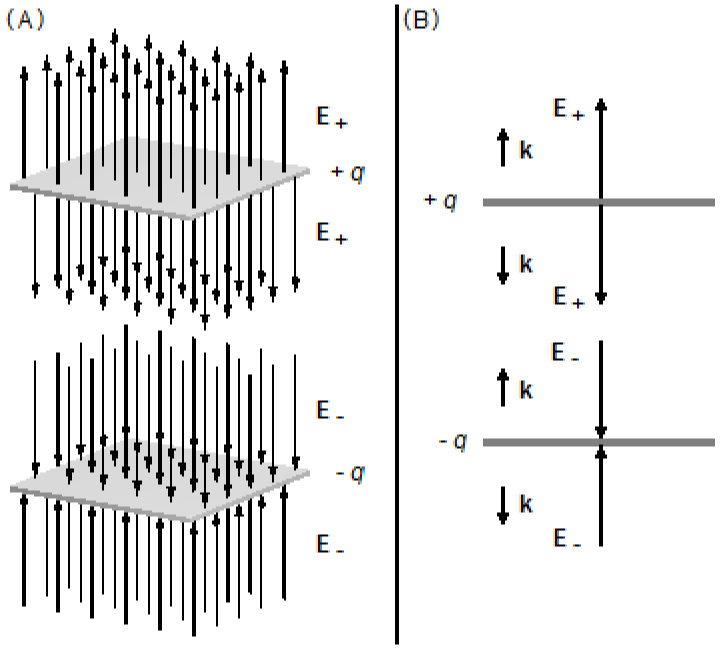

figura 1

Solução

Para a placa carregada positivamente vamos adotar uma *superfície Gaussiana* formada por um cilindro que atravessa o centro da placa, com as linhas do campo elétrico atravessando a superfície para fora (figura 2-A).

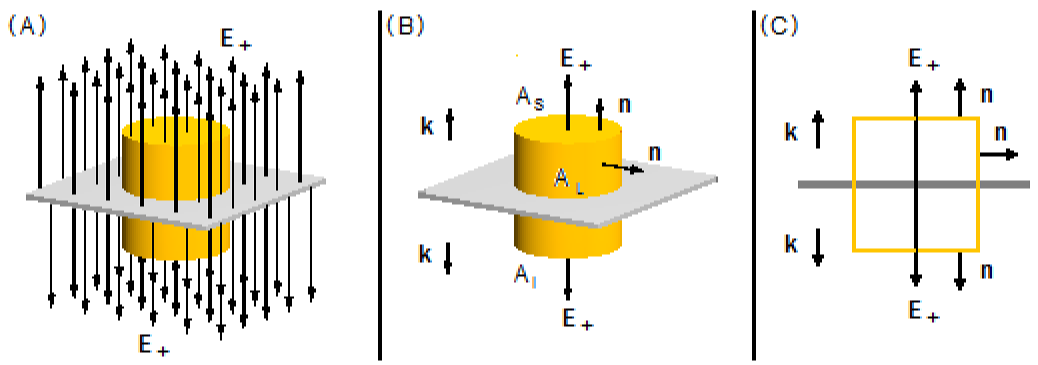

figura 2

Seja um vetor unitário **n** perpendicular às faces superior, inferior e lateral do cilindro (A_S , A_I e A_L), conforme figuras 2-B e 2-C.

A *Lei de Gauss* no diz que

$$\oint_A \mathbf{E}\,.\,d\,\mathbf{A}=\frac{q}{\epsilon_0}$$

onde a integral é a soma das integrais sobre cada uma das áreas da superfície do cilindro

$$\int_{A_S}\mathbf{E}_+.\,d\,\mathbf{A_S}+\int_{A_I}\mathbf{E}_+.\,d\,\mathbf{A_I}+\int_{A_L}\mathbf{E}_+.\,d\,\mathbf{A_L}=\frac{q}{\epsilon_0}$$

As áreas superior e inferior são iguais a área de um círculo ($A_S=A_I=A_C$), então podemos escrever

$$\int_{A_C}\mathbf{E}_+.\,d\,\mathbf{A_C}+\int_{A_C}\mathbf{E}_+.\,d\,\mathbf{A_C}+\int_{A_L}\mathbf{E}_+.\,d\,\mathbf{A_L}=\frac{q}{\epsilon_0}$$

$$2\int_{A_C}\mathbf{E}_+.\,d\,\mathbf{A_C}+\int_{A_L}\mathbf{E}_+.\,d\,\mathbf{A_L}=\frac{q}{\epsilon_0} \qquad \text{(I)}$$

O vetor campo elétrico só possui componente na direção **k**, pode ser escrito como

$$\mathbf{E}_+=E_+\,\mathbf{k} \qquad \text{(II)}$$

O vetor elemento de área pode ser escrito como

$$d\,\mathbf{A}=d\,A\,\mathbf{n} \qquad \text{(III)}$$

substituindo as expressões (II) e (III) em (I), obtemos

$$2\int_{A_C}E_+\,\mathbf{k}.\,d\,A_C\,\mathbf{n}+\int_{A_L}E_+\,\mathbf{k}\,.\,d\,A_L\,\mathbf{n}=\frac{q}{\epsilon_0}$$

$$2\int_{A_C}E_+\,d\,A_C\,\underbrace{\mathbf{k}\,.\,\mathbf{n}}_{1}+\int_{A_L}E_+\,d\,A_L\,\underbrace{\mathbf{k}\,.\,\mathbf{n}}_{0}=\frac{q}{\epsilon_0}$$

Observação: como **k** e **n** são vetores unitário seus módulos são iguais a 1 e como ambos estão na mesma direção e sentido nas faces superior e inferior o ângulo entre eles é nulo ($\theta=0$), assim $\mathbf{k}\,.\,\mathbf{n}=|\,\mathbf{k}\,|\,|\,\mathbf{n}\,|\cos 0=1\,.\,1\,.\,1=1$. Para a face lateral do cilindro **k** é perpendicular a **n** $\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)$ o produto escalar será $\mathbf{k}\,.\,\mathbf{n}=|\,\mathbf{k}\,|\,|\,\mathbf{n}\,|\cos\dfrac{\pi}{2}=1\,.\,1\,.\,0=0$.

$$2\int_{A_C}E_+\,d\,A_C=\frac{q}{\epsilon_0} \qquad \text{(IV)}$$

A densidade superficial de cargas é dada por

$$\sigma=\frac{q}{A}$$
$$q=\sigma\,A \qquad \text{(V)}$$

onde A representa a área onde as cargas estão distribuídas internamente à *superfície Gaussiana* (não toda a área da placa), e colocando o campo elétrico para fora da integral, substituindo a expressão (V) em (IV), temos

$$2\,E_+\underbrace{\int_{A_C}d\,A_C}_{A}=\frac{\sigma\,A}{\epsilon_0}$$

a integral da área do círculo é igual a área A da placa, interna à *superficial Gaussiana,* onde estão distribuídas as cargas, assim

$$
\begin{aligned}
2\,E_{+}\,A &= \frac{\sigma\,A}{\epsilon_0}\\
E_{+} &= \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0}
\end{aligned}
\tag{VI}
$$

Analogamente para a placa carregada negativamente temos a mesma *superfície Gaussiana* com a diferença de que as linhas do campo elétrico atravessam a superfície para dentro (figura 3-A).

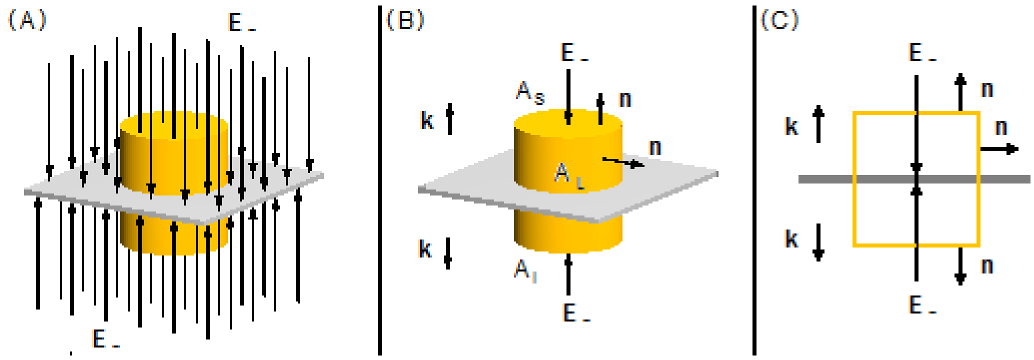

figura 3

O vetor unitário **n** tem a mesma orientação do caso anterior figuras 3-B e 3-C.

Usando a *Lei de Gauss* novamente temos a mesma situação com a carga negativa da placa

$$\int_{A_S}\mathbf{E}_{-}.d\,\mathbf{A}_{S}+\int_{A_I}\mathbf{E}_{-}.d\,\mathbf{A}_{I}+\int_{A_L}\mathbf{E}_{-}.d\,\mathbf{A}_{L}=\frac{-q}{\epsilon_0}$$

As áreas superior e inferior são igual a área de um círculo ($A_S = A_I = A_C$), então podemos escrever

$$
\begin{gathered}
\int_{A_C}\mathbf{E}_{-}.d\,\mathbf{A}_{C}+\int_{A_C}\mathbf{E}_{-}.d\,\mathbf{A}_{C}+\int_{A_L}\mathbf{E}_{-}.d\,\mathbf{A}_{L}=-\frac{q}{\epsilon_0}\\
2\int_{A_C}\mathbf{E}_{-}.d\,\mathbf{A}_{C}+\int_{A_L}\mathbf{E}_{-}.d\,\mathbf{A}_{L}=-\frac{q}{\epsilon_0}
\end{gathered}
\tag{VII}
$$

O vetor campo elétrico só possui componente na direção $-\mathbf{k}$ com sentido contrário à orientação, é escrito como

$$\mathbf{E}_{-}=-E_{-}\,\mathbf{k} \tag{VIII}$$

substituindo as expressões (III) e (VIII) em (VII), obtemos

$$
\begin{gathered}
2\int_{A_C}-E_{-}\,\mathbf{k}.d\,A_{C}\,\mathbf{n}+\int_{A_L}-E_{-}\,\mathbf{k}.d\,A_{L}\,\mathbf{n}=-\frac{q}{\epsilon_0}\\
-2\int_{A_C}E_{-}\,d\,A_{C}\,\underbrace{\mathbf{k}.\mathbf{n}}_{1}-\int_{A_L}E_{-}\,d\,A_{L}\,\underbrace{\mathbf{k}.\mathbf{n}}_{0}=-\frac{q}{\epsilon_0}\\
-2\int_{A_C}E_{-}\,d\,A_{C}=-\frac{q}{\epsilon_0}\,\epsilon_0
\end{gathered}
$$

$$2\int_{A_C} E_{-}\, d\,A_C=\frac{q}{\epsilon_0} \tag{IX}$$

substituindo a expressão (V) em (IX), temos

$$2\,E_{-}\underbrace{\int_{A_C} d\,A_C}_{A}=\frac{\sigma\,A}{\epsilon_0}$$

esta é a mesma integral calculada acima, o que nos leva ao mesmo resultado encontrado na expressão (VI)

$$E_{-}=\frac{\sigma}{2\,\epsilon_0} \tag{X}$$

Entre as placas os campos elétricos devido as placas carregadas positivamente e negativamente têm a mesma direção e o mesmo sentido, assim o módulo do campo elétrico resultante (E) será dada pela soma das expressões (VI) e (X)

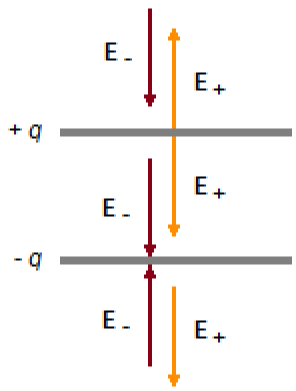

figura 4

$$\begin{aligned} E &= E_{+}+E_{-}\\ E &= \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0}+\frac{\sigma}{2\,\epsilon_0}\\ E &= 2\,\frac{\sigma}{2\,\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{-}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

Na região fora das placas os campos elétricos têm sentidos opostos, assim o módulo do campo elétrico resultante será dada pela diferença das expressões (VI) e (X)

$$\begin{aligned} E &= E_{+}-E_{-}\\ E &= \frac{\sigma}{2\,\epsilon_0}-\frac{\sigma}{2\,\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{-}=0}$$

Observação: esta solução vale para pontos longe das bordas das placas e pequena distância de separação entre elas, onde o campo elétrico é uniforme, região em destaque na figura 5. Próximo às bordas das placas o campo elétrico não é constante devido ao encurvamento das linhas do campo elétrico, este é o chamado *Efeito de Borda*.

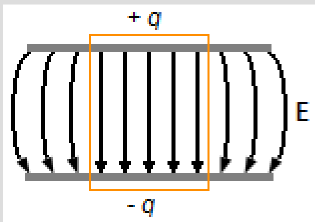

figura 5