Determine o módulo do campo elétrico de uma casca esférica carregada com uma carga Q em todo o espaço.

Dados do problema

- carga da casca esférica: Q.

Esquema do problema

Vamos assumir que a casca esférica está carrega com uma carga positiva (Q > 0) e seu raio é igual a R.

Para determinar o módulo do campo elétrico em todo o espaço devemos considerar os pontos no interior da casca esférica ($r \leqslant R$) e pontos no exterior da casca esférica ($r > R$), conforme figura 1.

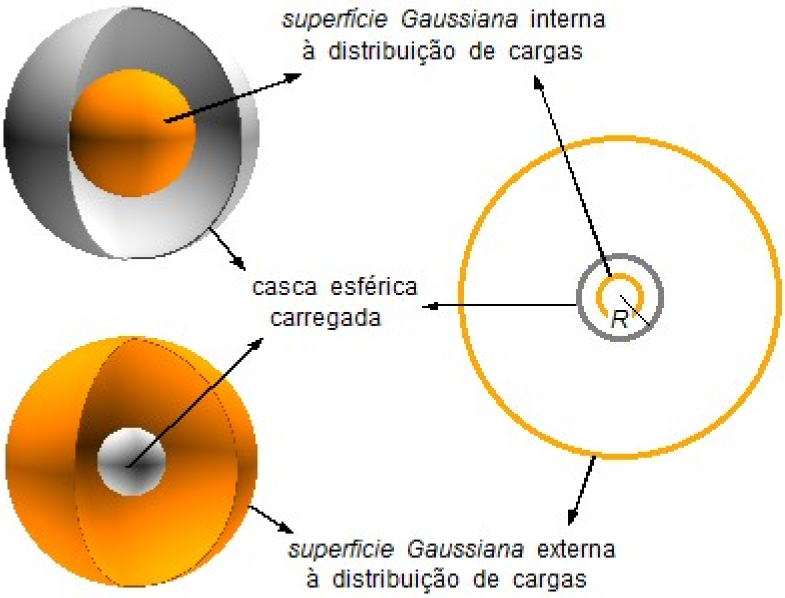

figura 1

Consideramos uma *superfície Gaussiana* interna e outra superfície externa á casca esférica.

Solução

- Para $r \leqslant R$:

No interior da casaca esférica não existem cargas, portanto o campo elétrico é nulo

$$\boxed{E=0}$$

- Para $r > R$:

A *Lei de Gauss* no diz que

$$\oint_A \mathbf{E}.d\,\mathbf{A}=\frac{q}{\epsilon_0} \qquad \text{(I)}$$

O campo elétrico se espalha radialmente a partir da distribuição de cargas na direção $\mathbf{e}_r$, e em cada elemento de área dA da superfície temos um vetor unitário **n** perpendicular à superfície e orientado para fora. Assim em cada ponto da superfície o vetor campo elétrico **E** e o vetor unitário **n** possuem a mesma direção e sentido (figura 2).

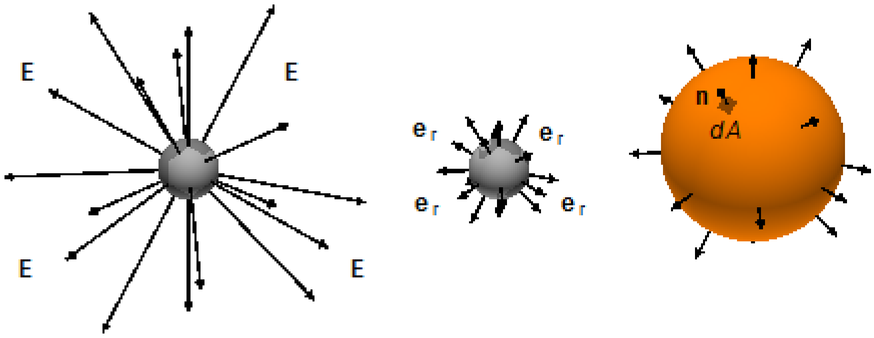

figura 2

O vetor campo elétrico só possui componente na direção $\mathbf{e}_r$ pode ser escrito como

$$\mathbf{E}=E\;\mathbf{e}_r \tag{II}$$

O vetor elemento de área pode ser escrito como

$$d\mathbf{A}=d A\;\mathbf{n} \tag{III}$$

substituindo as expressões (II) e (III) em (I), temos

$$\oint_A E\;\mathbf{e}_r . dA\;\mathbf{n}=\frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_A E\;dA\;\underbrace{\mathbf{e}_r . \mathbf{n}}_{1}=\frac{q}{\epsilon_0}$$

Observação: como $\mathbf{e}_r$ e **n** são vetores unitário seus módulos são iguais a 1 e como ambos estão na mesma direção e sentido o ângulo entre eles é nulo ($\theta=0$), assim $\mathbf{e}_r . \mathbf{n}=|\mathbf{e}_r||\mathbf{n}|\cos 0=1.1.1=1$.

$$\oint_A E\;dA=\frac{q}{\epsilon_0} \tag{IV}$$

Em coordenadas esféricas as coordenadas *x, y* e *z* são dados por

$$x=r\;\operatorname{sen}\theta\;\cos\phi \quad , \quad y=r\;\operatorname{sen}\theta\;\operatorname{sen}\phi \quad , \quad z=r\;\cos\theta \tag{V}$$

Para obter o elemento de área em coordenadas esféricas calculamos o *Jacobiano* dado pelo determinante

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

cálculo das derivadas parciais das funções *x*, *y* e *z* dadas em (V)

$x=r\,\operatorname{sen}\theta\,\cos\phi$:

$\dfrac{\partial x}{\partial r}=\dfrac{\partial\,(\,r\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,)}{\partial r}=\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\dfrac{\partial r}{\partial r}=\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,.1=\operatorname{sen}\theta\cos\phi$, na derivada em *r* os valores de θ e ϕ são constantes e o seno e cosseno saem da derivada.

$\dfrac{\partial x}{\partial\theta}=\dfrac{\partial\,(\,r\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,)}{\partial\theta}=r\cos\phi\,\dfrac{\partial\,(\,\operatorname{sen}\theta\,)}{\partial\theta}=r\cos\theta\cos\phi$, na derivada em θ os valores de *r* e ϕ são constantes e o termo em *r* e o seno saem da derivada.

$\dfrac{\partial x}{\partial\phi}=\dfrac{\partial\,(\,r\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,)}{\partial\phi}=r\operatorname{sen}\theta\,\dfrac{\partial\,(\,\cos\phi\,)}{\partial\phi}=r\operatorname{sen}\theta\,(\,-\operatorname{sen}\phi\,)=-r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$,na derivada em ϕ os valores de *r* e θ são constantes e o termo em *r* e o seno saem da derivada.

$y=r\,\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$:

$\dfrac{\partial y}{\partial r}=\dfrac{\partial\,(\,r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,)}{\partial r}=\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\dfrac{\partial r}{\partial r}=\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,.1=\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$, na derivada em *r* os valores de θ e ϕ são constantes e os termos em seno saem da derivada.

$\dfrac{\partial y}{\partial\theta}=\dfrac{\partial\,(\,r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,)}{\partial\theta}=r\operatorname{sen}\phi\,\dfrac{\partial\,(\,\operatorname{sen}\theta\,)}{\partial\theta}=r\cos\theta\operatorname{sen}\phi$, na derivada em θ os valores de *r* e ϕ são constantes e o termo em *r* e o seno saem da derivada.

$\dfrac{\partial y}{\partial\phi}=\dfrac{\partial\,(\,r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,)}{\partial\phi}=r\operatorname{sen}\theta\,\dfrac{\partial\,(\,\operatorname{sen}\phi\,)}{\partial\phi}=r\operatorname{sen}\theta\cos\phi$, na derivada em ϕ os valores de *r* e θ são constantes e o termo em *r* e o seno saem da derivada.

$z=r\,\cos\theta$:

$\dfrac{\partial z}{\partial r}=\dfrac{\partial\,(\,r\cos\theta\,)}{\partial r}=\cos\theta\,\dfrac{\partial r}{\partial r}=\cos\theta\,.1=\cos\theta$, na derivada em *r* o valor de θ é constante e o termo em cosseno sai da derivada.

$\dfrac{\partial z}{\partial\theta}=\dfrac{\partial\,(\,r\cos\theta\,)}{\partial\theta}=r\,\dfrac{\partial\,(\,\cos\theta\,)}{\partial\theta}=r\,(\,-\operatorname{sen}\theta\,)=-r\operatorname{sen}\theta$, na derivada em θ o valor de *r* é constante e o termo em *r* sai da derivada.

$\dfrac{\partial z}{\partial\phi}=\dfrac{\partial\,(\,r\cos\theta\,)}{\partial\phi}=0$,a função *z* não depende de ϕ, na derivada em ϕ os valores de *r* e θ são constantes e a derivada de uma constante é zero..

$$dA=J\,d\theta\,d\phi$$

Observação: não há variação $d\,r$ pois a *superfície Gaussiana* possui raio constante igual a *r*.

$$J=\begin{vmatrix}\operatorname{sen}\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & r\cos\theta\operatorname{sen}\phi & r\operatorname{sen}\theta\cos\phi\\ \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0\end{vmatrix}$$

desenvolvendo o determinante pela *Regra de Sarrus*, temos

$$J=(\operatorname{sen}\theta\cos\phi).(r\cos\theta\operatorname{sen}\phi).0+(r\cos\theta\cos\phi).(r\operatorname{sen}\theta\cos\phi).(\cos\theta)+$$
$$+(-r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi).(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi).(-r\operatorname{sen}\theta)-(-r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi).(r\cos\theta\operatorname{sen}\phi).(\cos\theta)-$$
$$-(\operatorname{sen}\theta\cos\phi).(r\operatorname{sen}\theta\cos\phi).(-r\operatorname{sen}\theta)-(r\cos\theta\cos\phi).(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi).0$$

$$J=0+r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\cos^2\phi+r^2\operatorname{sen}^3\theta\operatorname{sen}^2\phi+r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi+r^2\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\phi-0$$

$$J=r^2\left[\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\cos^2\phi+\operatorname{sen}^3\theta\operatorname{sen}^2\phi+\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi+\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\phi\right]$$

$$J=r^2\left[\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\underbrace{(\cos^2\phi+\operatorname{sen}^2\phi)}_{1}+\operatorname{sen}^3\theta\underbrace{(\cos^2\phi+\operatorname{sen}^2\phi)}_{1}\right]$$

$$J=r^2\left[\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\theta\right]$$

$$J=r^2\left[\underbrace{(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}_{1}\operatorname{sen}\theta\right]$$

$$J=r^2\operatorname{sen}\theta$$

$$dA=r^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\phi \qquad \text{(VI)}$$

substituindo a expressão (VI) em (VI)

$$\int_A E\,r^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\phi=\frac{q}{\epsilon_0} \qquad \text{(VII)}$$

Como o campo elétrico é uniforme e a integral não depende do raio eles podem “sair” da integral e como não existem termos “cruzados” em θ e ϕ as integrais podem ser separadas

$$E\,r^2\int\operatorname{sen}\theta\,d\theta\int d\phi=\frac{q}{\epsilon_0}$$

Os limites de integração serão de 0 a $\dfrac{\pi}{2}$ em $d\theta$ e de 0 e 2π em $d\phi$ (uma volta completa na base do hemisfério), conforme figura 3

$$E\,r^2\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\phi=\frac{q}{\epsilon_0}$$

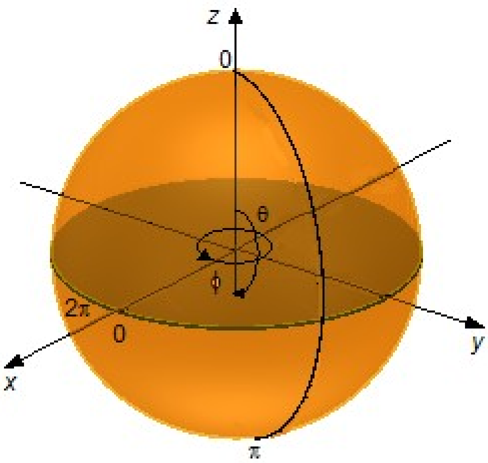

figura 3

integração de $\displaystyle\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$

$$\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\,d\theta\Rightarrow-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\Rightarrow-(\cos\pi-\cos 0)\Rightarrow-(-1-1)\Rightarrow-(-2)\Rightarrow 2$$

integração de $\displaystyle\int_0^{2\pi}d\phi$

$$\int_{0}^{2\pi} d\phi=\phi\,\Big|_{0}^{2\pi}=2\pi-0=2\pi$$

$$E\,r^{2}.2.2\pi=\frac{q}{\epsilon_{0}}$$

$$\boxed{E=\frac{q}{4\pi\epsilon_{0}r^{2}}}$$