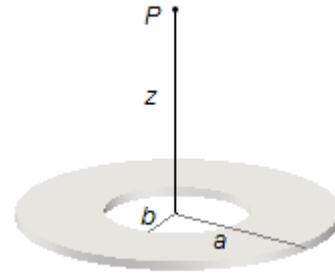


Um disco de raio a possui no centro um orifício de raio b e está carregado uniformemente com uma carga Q . Calcule o vetor campo elétrico num ponto P sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano do disco a uma distância z do seu centro.



Dados do problema

- raio do disco: a ;
- raio do orifício: b ;
- carga do disco: Q ;
- distância ao ponto onde se quer o campo elétrico: z .

Esquema do problema

O vetor posição \mathbf{r} vai de um elemento de carga do disco dq até o ponto P onde se deseja calcular o campo elétrico, o vetor \mathbf{r}_q localiza o elemento de carga em relação à origem do referencial e o vetor \mathbf{r}_p localiza o ponto P , assim pela figura 1-A

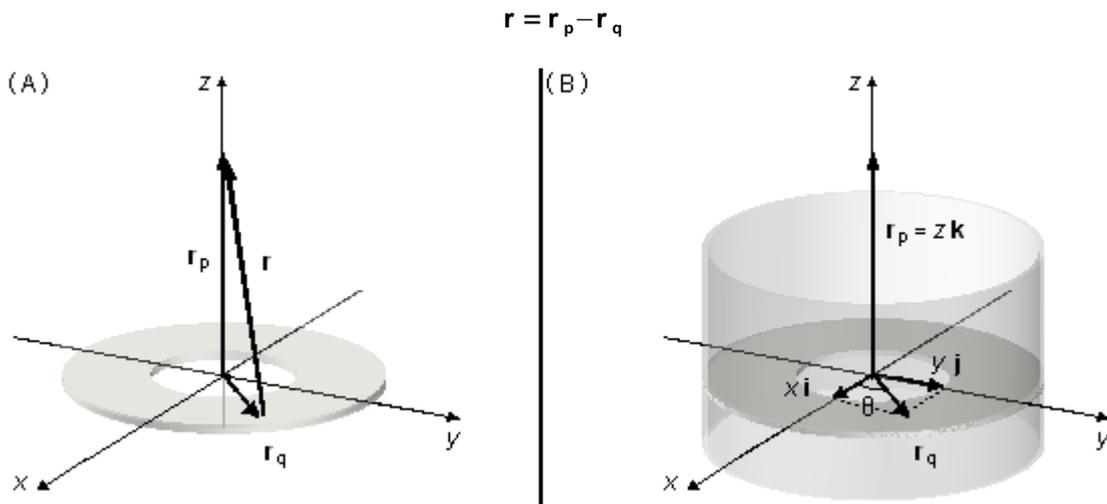


figura 1

Pela geometria do problema devemos escolher coordenadas cilíndricas (figura 1-B), o vetor \mathbf{r}_q , que está no plano xy , é escrito como $\mathbf{r}_q = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$ e o vetor \mathbf{r}_p só possui componente na direção \mathbf{k} , $\mathbf{r}_p = z \mathbf{k}$, então o vetor posição será

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= z \mathbf{k} - (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) \\ \mathbf{r} &= -x \mathbf{i} - y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \end{aligned} \quad (I)$$

Da expressão (I) o módulo do vetor posição \mathbf{r} será

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (II)$$

onde x , y e z , em coordenadas cilíndricas, são dados por

$$x = r_q \cos \theta, \quad y = r_q \sin \theta, \quad z = z \quad (III)$$

Solução

O vetor campo elétrico é dado por

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^3} \mathbf{r} \quad (\text{IV})$$

Da expressão da densidade superficial de carga (σ) obtemos o elemento de carga dq

$$\sigma = \frac{dq}{dA}$$

$$dq = \sigma dA \quad (\text{V})$$

onde dA é um elemento de área de ângulo $d\theta$ do disco, assim pela figura 2

$$dA = r_q dr_q d\theta \quad (\text{VI})$$

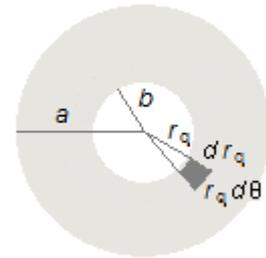


figura 2

substituindo (VI) em (V)

$$dq = \sigma r_q dr_q d\theta \quad (\text{VII})$$

substituindo (I), (II) e (VII) em (IV), e como a integração é feita sobre a superfície do disco (depende de duas variáveis r e θ) temos uma integral dupla

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\sigma r_q dr_q d\theta}{\left[(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \right]^3} (-x \mathbf{i} - y \mathbf{j} + z \mathbf{k})$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\sigma r_q dr_q d\theta}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (-x \mathbf{i} - y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) \quad (\text{VIII})$$

substituindo as expressões de (III) em (VIII), vem

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\sigma r_q dr_q d\theta}{\left[(r_q \cos\theta)^2 + (r_q \sin\theta)^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} (-r_q \cos\theta \mathbf{i} - r_q \sin\theta \mathbf{j} + z \mathbf{k})$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\sigma r_q dr_q d\theta}{\left[r_q^2 \cos^2\theta + r_q^2 \sin^2\theta + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} (-r_q \cos\theta \mathbf{i} - r_q \sin\theta \mathbf{j} + z \mathbf{k})$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\sigma r_q dr_q d\theta}{\left[r_q^2 (\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_1) + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} (-r_q \cos\theta \mathbf{i} - r_q \sin\theta \mathbf{j} + z \mathbf{k})$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \frac{\sigma r_q dr_q d\theta}{(r_q^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (-r_q \cos\theta \mathbf{i} - r_q \sin\theta \mathbf{j} + z \mathbf{k})$$

Como a densidade de carga σ é constante e a integral não depende de z , depende de r_q e θ , ela podem "sair" da integral, e sendo a integral da soma igual a soma das integrais podemos escrever

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left(- \int \int \frac{r_q^2 \cos\theta dr_q d\theta}{(r_q^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{i} - \int \int \frac{r_q^2 \sin\theta dr_q d\theta}{(r_q^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{j} + z \int \int \frac{r_q dr_q d\theta}{(r_q^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{k} \right)$$

Os limites de integração serão de b a a em dr_q (ao longo do raio do disco) e de 0 e 2π em $d\theta$ (uma volta completa no disco), e como não existem termos “cruzados” em r e θ as integrais podem ser separadas

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left(- \int_b^a \frac{r_q^2 dr_q}{(r_q^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \mathbf{i} - \int_b^a \frac{r_q^2 dr_q}{(r_q^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta \mathbf{j} + z \int_b^a \frac{r_q dr_q}{(r_q^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta \mathbf{k} \right)$$

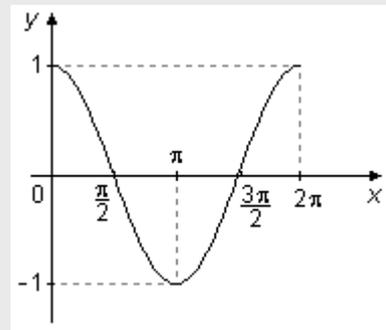
integração de $\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta$

1.º método

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = \sin\theta \Big|_0^{2\pi} = \sin 2\pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$$

2.º método

O gráfico de cosseno entre 0 e 2π possui uma área “positiva” acima do eixo x , entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ e entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π , e uma área “negativa” abaixo do eixo x , entre $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, estas duas áreas se cancelam no cálculo da integral, sendo o valor da integral zero.



integração de $\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta$

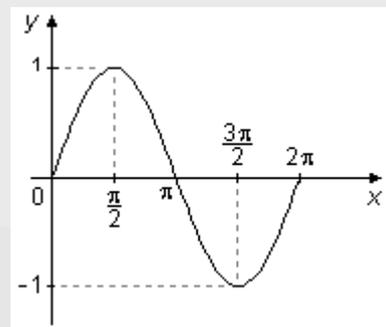
1.º método

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = -\cos\theta \Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = -(1 - 1) = 0$$

2.º método

O gráfico do seno entre 0 e 2π possui uma área “positiva” acima do eixo x , entre 0 e π , e uma área “negativa” abaixo do eixo x , entre π e 2π , estas duas áreas se cancelam no cálculo da integral, sendo o valor da integral zero.

Observação: as duas integrais, nas direções \mathbf{i} e \mathbf{j} , que são nulas representam o cálculo matemático para a afirmação que se faz usualmente de que as componentes do campo elétrico paralelas ao plano- xy ($d\mathbf{E}_P$) se anulam. Apenas as componentes normais ao plano ($d\mathbf{E}_N$) contribuem para o campo elétrico total (figura 3 - abaixo). Como as integrais em seno e cosseno são nulas não é preciso fazer a integral do raio.



Integração de $\int_b^a \frac{r_q dr_q}{(r_q^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

fazendo a mudança de variável

$$u = r_q^2 + z^2$$

$$du = 2r_q dr_q \Rightarrow dr_q = \frac{du}{2r_q}$$

fazendo a mudança dos extremos de integração

para $r_q = b$
temos $u = b^2 + z^2$

para $r_q = a$
temos $u = a^2 + z^2$

$$\int_{b^2+z^2}^{a^2+z^2} \frac{r_q}{u^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{2r_q} \Rightarrow \frac{1}{2} \int_{b^2+z^2}^{a^2+z^2} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} du \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{u^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} \Big|_{b^2+z^2}^{a^2+z^2} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{u^{-\frac{3+2}{2}}}{-\frac{3+2}{2}} \Big|_{b^2+z^2}^{a^2+z^2} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \Big|_{b^2+z^2}^{a^2+z^2} \Rightarrow -u^{-\frac{1}{2}} \Big|_{b^2+z^2}^{a^2+z^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} \Big|_{b^2+z^2}^{a^2+z^2} \Rightarrow -\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}} \right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

integração de $\int_0^{2\pi} d\theta$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = \theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

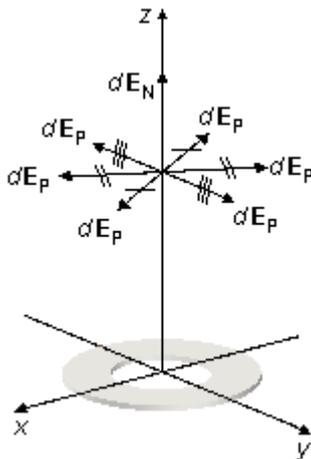


figura 3

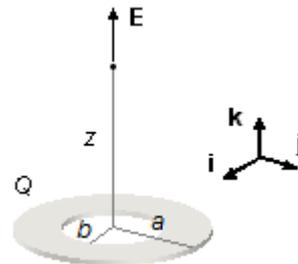


figura 4

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + z \left(\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} \right) 2\pi\mathbf{k} \right]$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[z \left(\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} \right) 2\pi\mathbf{k} \right]$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} \right) \mathbf{k}$$