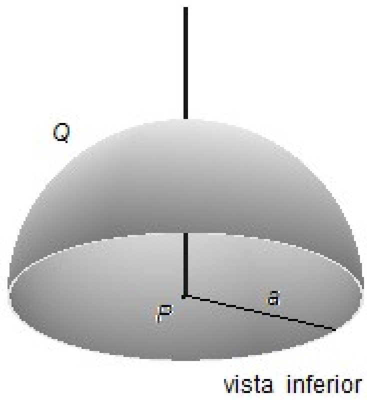
Uma casca hemisférica de raio *a* está carregada uniformemente com uma carga *Q*. Calcule o vetor campo elétrico num ponto *P* no centro da base do hemisfério.



Dados do problema

- raio do disco: *a*;
- carga do disco: *Q*.

Esquema do problema

O vetor posição **r** vai de um elemento de carga da casca $d\,q$ até o ponto *P* onde se deseja calcular o campo elétrico, assim pela figura 1

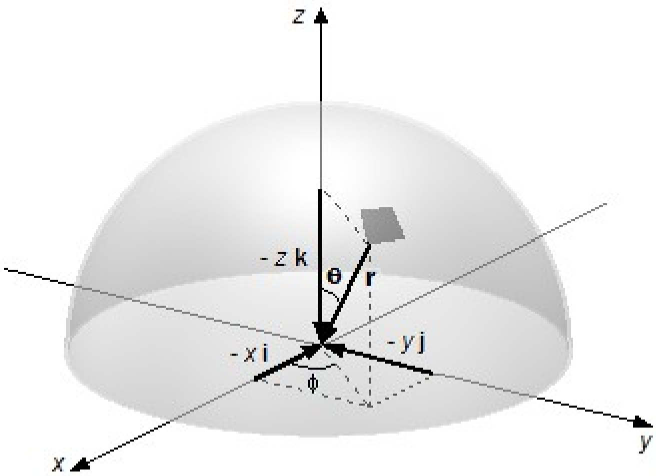


figura 1

Pela geometria do problema devemos escolher coordenadas esféricas, então o vetor posição será

$$\mathbf{r}=-x\ \mathbf{i}-y\ \mathbf{j}-z\ \mathbf{k} \tag{I}$$

Da expressão (I) o módulo do vetor posição **r** será

$$r^2=x^2+y^2+z^2$$
$$r=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{II}$$

onde *x*, *y* e *z*, em coordenadas esféricas, são dados por

$$x=a\ \operatorname{sen}\theta\cos\phi\quad,\quad y=a\ \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\phi\quad,\quad z=a\ \cos\theta \tag{III}$$

Solução

O vetor campo elétrico é dado por

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^3}\mathbf{r} \tag{IV}$$

Da expressão da densidade superficial de carga (σ) obtemos o elemento de carga dq

$$\sigma=\frac{dq}{dA}$$

$$dq=\sigma\, dA \tag{V}$$

onde dA é um elemento de área da esfera, assim pela figura 2

$$dA=r\, d\theta\, r\,\text{sen}\,\theta\, d\phi$$

$$dA=r^2\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi \tag{VI}$$

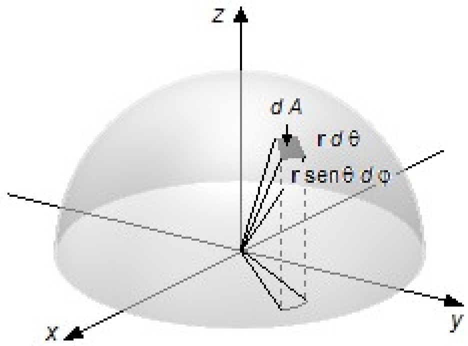


figura 2

substituindo (VI) em (V)

$$dq=\sigma r^2\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi \tag{VII}$$

substituindo (VII) em (IV), e como a integração é feita sobre a superfície do hemisfério (depende de duas variáveis θ e ϕ) temos uma integral dupla

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\sigma r^2\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi}{r^3}\mathbf{r}$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\sigma\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi}{r}\mathbf{r} \tag{VIII}$$

substituindo (I) e (II) em (VIII), temos

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\sigma\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left(-x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}-z\,\mathbf{k}\right) \tag{IX}$$

substituindo as expressões de (III) em (IX), vem

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\sigma\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi}{\left[\left(a\,\text{sen}\,\theta\cos\phi\right)^2+\left(a\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\right)^2+\left(a\cos\theta\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\times$$
$$\times\left(-a\,\text{sen}\,\theta\cos\phi\,\mathbf{i}-a\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\,\mathbf{j}-a\cos\theta\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\sigma\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi}{\left[a^2\,\text{sen}^2\theta\cos^2\phi+a^2\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\phi+a^2\cos^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}}\times$$
$$\times\left(-a\,\text{sen}\,\theta\cos\phi\,\mathbf{i}-a\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\,\mathbf{j}-a\cos\theta\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{-a\sigma\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi}{a\left[\text{sen}^2\theta\cos^2\phi+\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\phi+\cos^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}}\left(\text{sen}\,\theta\cos\phi\,\mathbf{i}+\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\,\mathbf{j}+\cos\theta\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{-\sigma\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, d\phi}{\left[\text{sen}^2\theta\cos^2\phi+\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\phi+\cos^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}}\left(\text{sen}\,\theta\cos\phi\,\mathbf{i}+\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\,\mathbf{j}+\cos\theta\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{-\sigma\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi}{\left[\operatorname{sen}^2\theta\underbrace{\left(\cos^2\phi+\operatorname{sen}^2\phi\right)}_{1}+\cos^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}}\left(\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\mathbf{i}+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}+\cos\theta\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{-\sigma\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi}{\left[\underbrace{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}_{1}\right]^{\frac{1}{2}}}\left(\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\mathbf{i}+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}+\cos\theta\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{-\sigma\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi}{1^{\frac{1}{2}}}\left(\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\mathbf{i}+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}+\cos\theta\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int-\sigma\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\left(\operatorname{sen}\theta\cos\phi\,\mathbf{i}+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}+\cos\theta\,\mathbf{k}\right)$$

Como a densidade de carga σ é constante ela podem “sair” da integral, e sendo a integral da soma igual a soma das integrais podemos escrever

$$\mathbf{E}=\frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left(\int\int\operatorname{sen}^2\theta\cos\phi\, d\theta\, d\phi\,\mathbf{i}+\int\int\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi\,\mathbf{j}+\right.$$
$$\left.+\int\int\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta\, d\phi\,\mathbf{k}\right)$$

Os limites de integração serão de 0 e 2π em $d\phi$ (uma volta completa na base do hemisfério) e de 0 a $\frac{\pi}{2}$ em $d\theta$ (figura 3), como não existem termos “cruzados“ em ϕ e θ as integrais podem ser separadas

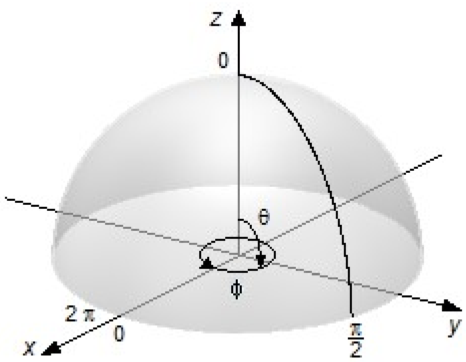


figura 3

$$\mathbf{E}=\frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\phi\, d\phi}_{0}\,\mathbf{i}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta\underbrace{\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\phi\, d\phi}_{0}\,\mathbf{j}+\right.$$
$$\left.+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\,\mathbf{k}\right)$$

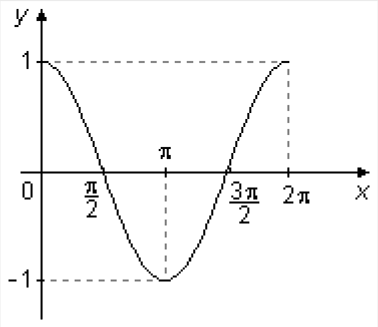
integração de $\int_0^{2\pi}\cos\phi\, d\phi$

1.º método

$$\int_0^{2\pi}\cos\phi\, d\phi=\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{2\pi}=\operatorname{sen}2\pi-\operatorname{sen}0=0-0=0$$

2.º método

O gráfico de cosseno entre 0 e 2π possui uma área "positiva" acima do eixo x, entre 0 e $\dfrac{\pi}{2}$ e entre $\dfrac{3\pi}{2}$ e 2π, e uma área "negativa" abaixo do eixo x, entre $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{3\pi}{2}$, estas duas áreas se cancelam no cálculo da integral, sendo o valor da integral zero.

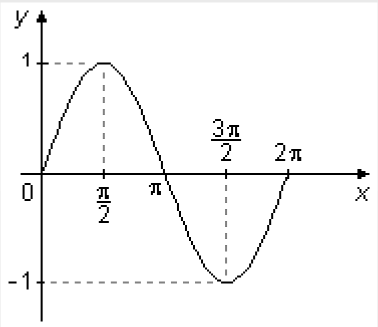


integração de $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi$

1.º método

$$\int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi = -\cos\phi \,\Big|_{0}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = -(1-1) = 0$$

2.º método



O gráfico do seno entre 0 e 2π possui uma área "positiva" acima do eixo x, entre 0 e π, e uma área "negativa" abaixo do eixo x, entre π e 2π, estas duas áreas se cancelam no cálculo da integral, sendo o valor da integral zero.

Observação: as duas integrais, nas direções **i** e **j**, que são nulas representam o cálculo matemático para a afirmação que se faz usualmente de que as componentes do campo elétrico paralelas ao plano-*xy* ($d\,\mathbf{E}_{P}$) se anulam. Apenas as componentes normais ao plano ($d\,\mathbf{E}_{N}$) contribuem para o campo elétrico total (figura 4 - abaixo). Como as integrais em seno e cosseno são nulas não é preciso fazer a integral do quadrado do seno.

Integração de $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta$

fazendo a mudança de variável

$$u = \operatorname{sen}\theta$$
$$d u = \cos\theta \, d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{d u}{\cos\theta}$$

fazendo a mudança dos extremos de integração

para $\theta = 0$

temos $u = \operatorname{sen} 0 \Rightarrow u = 0$

para $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

temos $u = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$

$$\int_{0}^{1} u \cos\theta \frac{d u}{\cos\theta} = \int_{0}^{1} u \, d u = \frac{u^2}{2}\Big|_{0}^{1} = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

integração de $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} d\phi$

$$\int_{0}^{2\pi} d\phi=\left.\phi\right|_{0}^{2\pi}=2\pi-0=2\pi$$

$$\mathbf{E}=\frac{-\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left[0\ \mathbf{i}-0\ \mathbf{j}+\frac{1}{2}.\ 2\pi\ \mathbf{k}\right]$$

$$\mathbf{E}=\frac{-\sigma}{4\ \epsilon_0}\ \mathbf{k} \qquad \text{(X)}$$

A densidade superficial de carga é dada por

$$\sigma=\frac{Q}{A} \qquad \text{(XI)}$$

onde Q é a carga do hemisfério e A a sua área. A área de um hemisfério é metade da área de uma esfera $A_{\text{E}}=4\pi r^2$ com $r=a$

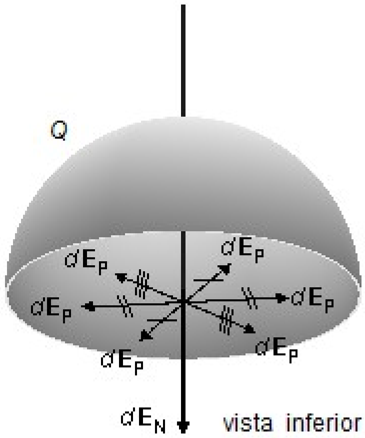


figura 4

$$A=\frac{A_{\text{E}}}{2}$$
$$A=\frac{4\pi a^2}{2}$$
$$A=2\pi a^2 \qquad \text{(XII)}$$

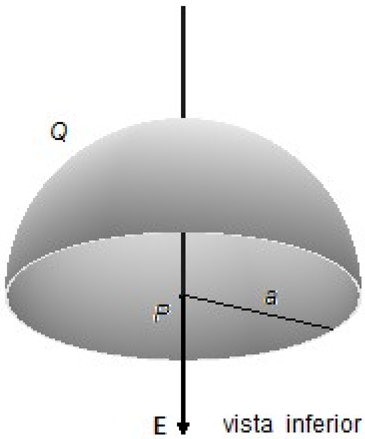


figura 5

substituindo (XII) em (XI) e esta em (X), obtemos

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{4\epsilon_0}\frac{Q}{2\pi a^2}\ \mathbf{k}$$

$$\boxed{\mathbf{E}=-\frac{Q}{8\epsilon_0\pi a^2}\ \mathbf{k}}$$