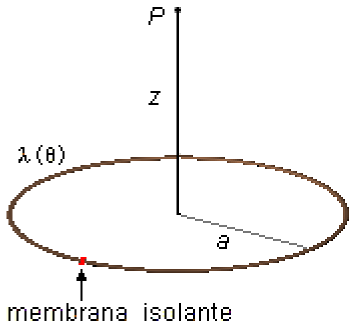
Um aro de raio a está carregado com uma carga cuja densidade varia diretamente com a posição angular, entre os pontos zero e 2π há uma membrana muito fina de material isolante. Calcule o vetor campo elétrico num ponto P sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano do aro a uma distância z do seu centro.



Dados do problema

- raio do aro: a;
- distância ao ponto onde se quer o campo elétrico: z.

Esquema do problema

A densidade linear de carga do aro é diretamente proporcional à posição angular da carga (figura 1)

$$\lambda(\theta)=\alpha\,\theta \tag{I}$$

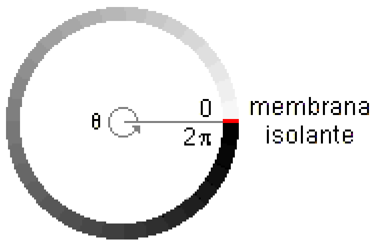


figura 1

onde α é uma constante que torna a expressão dimensionalmente consistente. Os pontos zero e 2π representam o mesmo ponto do aro, isto quer dizer que há duas densidades de carga diferentes para o mesmo ponto. Para resolver esta inconsistência o problema nos diz que há uma membrana isolante muito fina, assim fisicamente os dois pontos com cargas diferentes estão separados e matematicamente podemos fazer a integração de zero a 2π.

O vetor posição **r** vai de um elemento de carga do aro dq até o ponto P onde se deseja calcular o campo elétrico, o vetor $\mathbf{r}_q$ localiza o elemento de carga em relação à origem do referencial e o vetor $\mathbf{r}_p$ localiza o ponto P, assim pela figura 2-A

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_p-\mathbf{r}_q$$

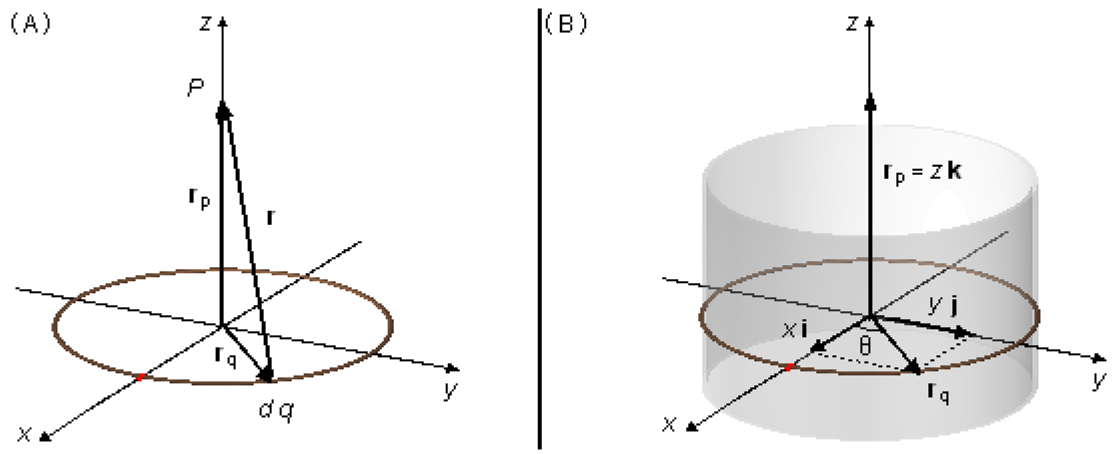


figura 2

Pela geometria do problema devemos escolher coordenadas cilíndricas (figura 2-B), o vetor $\mathbf{r}_q$, que está no plano xy, é escrito como $\mathbf{r}_q=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}$ e o vetor $\mathbf{r}_p$ só possui componente na direção **k**, $\mathbf{r}_p=z\,\mathbf{k}$, então o vetor posição será

$$\mathbf{r}=z\,\mathbf{k}-\left(x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}\right)$$
$$\mathbf{r}=-x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k} \tag{II}$$

Da expressão (II) o módulo do vetor posição **r** será

$$r^2=x^2+y^2+z^2$$
$$r=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{III}$$

onde x, y e z, em coordenadas cilíndricas, são dados por

$$x=a\cos\theta\quad,\quad y=a\operatorname{sen}\theta\quad,\quad z=z \tag{IV}$$

Solução

O vetor campo elétrico é dado por

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^3}\mathbf{r} \tag{V}$$

Da expressão da densidade linear de carga (λ) obtemos o elemento de carga dq

$$\lambda(\theta)=\frac{dq}{ds}$$
$$dq=\lambda(\theta)\,ds \tag{VI}$$

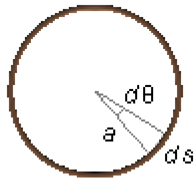


figura 3

onde ds é um elemento de arco de ângulo $d\theta$ do aro (figura 3), assim

$$ds=a\,d\theta \tag{VII}$$

substituindo (I) e (VII) em (VI)

$$dq=\alpha\,\theta\,a\,d\theta \tag{VIII}$$

substituindo (II), (III) e (VIII) em (V), temos

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\alpha\,\theta\,a\,d\theta}{\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^3}\left(-x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\alpha\,\theta\,a\,d\theta}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right) \tag{IX}$$

substituindo as expressões de (IV) em (IX), vem

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\alpha\,\theta\,a\,d\theta}{\left[\left(a\cos\theta\right)^2+\left(a\operatorname{sen}\theta\right)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-a\cos\theta\,\mathbf{i}-a\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\alpha\,\theta\,a\,d\theta}{\left[a^2\cos^2\theta+a^2\operatorname{sen}^2\theta+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-a\cos\theta\,\mathbf{i}-a\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\alpha\,\theta\,a\,d\theta}{\left[a^2\underbrace{\left(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta\right)}_{1}+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-a\cos\theta\,\mathbf{i}-a\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\alpha\,\theta\,a\,d\theta}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-a\cos\theta\;\mathbf{i}-a\,\operatorname{sen}\theta\;\mathbf{j}+z\;\mathbf{k}\right)$$

Como a constante de proporcionalidade α e o raio a são constantes, e, a integral não depende de z, depende apenas de θ, eles podem "sair" da integral, e sendo a integral da soma igual a soma das integrais podemos escrever

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\alpha\,a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-a\int\theta\cos\theta\,d\theta\;\mathbf{i}-a\int\theta\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta\;\mathbf{j}+z\int\theta\,d\theta\;\mathbf{k}\right)$$

Os limites de integração serão 0 e 2π (uma volta completa no aro)

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\alpha\,a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-a\int_0^{2\pi}\theta\cos\theta\,d\theta\;\mathbf{i}-a\int_0^{2\pi}\theta\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta\;\mathbf{j}+z\int_0^{2\pi}\theta\,d\theta\;\mathbf{k}\right)$$

integração de $\displaystyle\int_0^{2\pi}\theta\cos\theta\,d\theta$

Usando *Integração por Partes* $\int u\,v'=u\,v-\int u'\,v$, escolhemos

$$u=\theta \qquad v'=\cos\theta$$
$$u'=1 \qquad v=\operatorname{sen}\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\theta\cos\theta\,d\theta=\theta\,\operatorname{sen}\theta\,\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\theta\cos\theta\,d\theta=\theta\,\operatorname{sen}\theta\,\Big|_0^{2\pi}-\left(-\cos\theta\,\Big|_0^{2\pi}\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\theta\cos\theta\,d\theta=\theta\,\operatorname{sen}\theta\,\Big|_0^{2\pi}+\cos\theta\,\Big|_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi}\theta\cos\theta\,d\theta=\left(2\pi.\operatorname{sen}2\pi-0.\operatorname{sen}0\right)+\left(\cos2\pi-\cos0\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\theta\cos\theta\,d\theta=\left(2\pi.0-0.0\right)+\left(1-1\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\theta\cos\theta\,d\theta=0$$

integração de $\displaystyle\int_0^{2\pi}\theta\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta$

Usando *Integração por Partes* $\int u\,v'=u\,v-\int u'\,v$, escolhemos

$$u=\theta \qquad v'=\operatorname{sen}\theta$$
$$u'=1 \qquad v=-\cos\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\theta\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta=-\theta\cos\theta\,\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}-\cos\theta\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\theta\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta=-\theta\cos\theta\,\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\theta\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta=-\theta\cos\theta\,\Big|_0^{2\pi}+\operatorname{sen}\theta\,\Big|_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi}\theta\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta=-(2\pi.\cos 2\pi-0.\cos 0)+(\operatorname{sen}2\pi-\operatorname{sen}0)$$

$$\int_0^{2\pi}\theta\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta=-(2\pi.1-0.1)+(0-0)$$

$$\int_0^{2\pi}\theta\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta=-2\pi$$

integração de $\int_0^{2\pi}\theta\,d\theta$

$$\int_0^{2\pi}\theta\,d\theta=\frac{\theta^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{(2\pi)^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{4\pi^2}{2}-0=2\pi^2$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\alpha a}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\left[-a.0\,\mathbf{i}-a(-2\pi)\,\mathbf{j}+z(2\pi^2)\,\mathbf{k}\right]$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\alpha a}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\left(2\pi\,a\,\mathbf{j}+2\pi^2\,z\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi\,\alpha\,a}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\left(a\,\mathbf{j}+\pi\,z\,\mathbf{k}\right)$$

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{1}{2\epsilon_0}\frac{\alpha a}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\left(a\,\mathbf{j}+\pi\,z\,\mathbf{k}\right)}$$

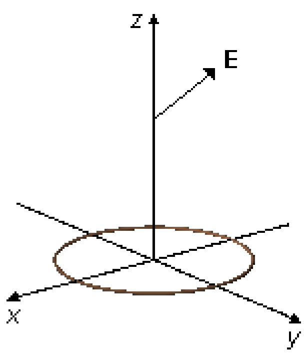


figura 4