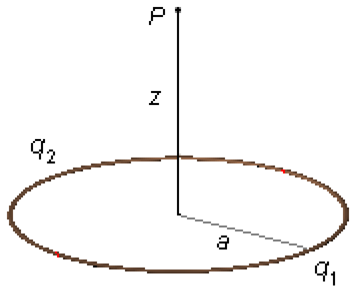
Um aro de raio a está carregado uniformemente com uma carga q_1 numa das metades do aro e outra carga q_2 na outra metade. Calcule o vetor campo elétrico num ponto P sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano do aro a uma distância z do seu centro.



Dados do problema

- raio do aro: a;
- carga de uma metade do aro: q_1;
- carga da outra metade do aro: q_2;
- distância ao ponto onde se quer o campo elétrico: z.

Solução

- Para a metade do aro com carga q_1 entre 0 e π

O vetor posição $\mathbf{r}_1$ vai de um elemento de carga do aro dq_1 até o ponto P onde se deseja calcular o campo elétrico, o vetor $\mathbf{r}_q$ localiza o elemento de carga em relação à origem do referencial e o vetor $\mathbf{r}_p$ localiza o ponto P, assim pela figura 1-A

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_p-\mathbf{r}_q$$

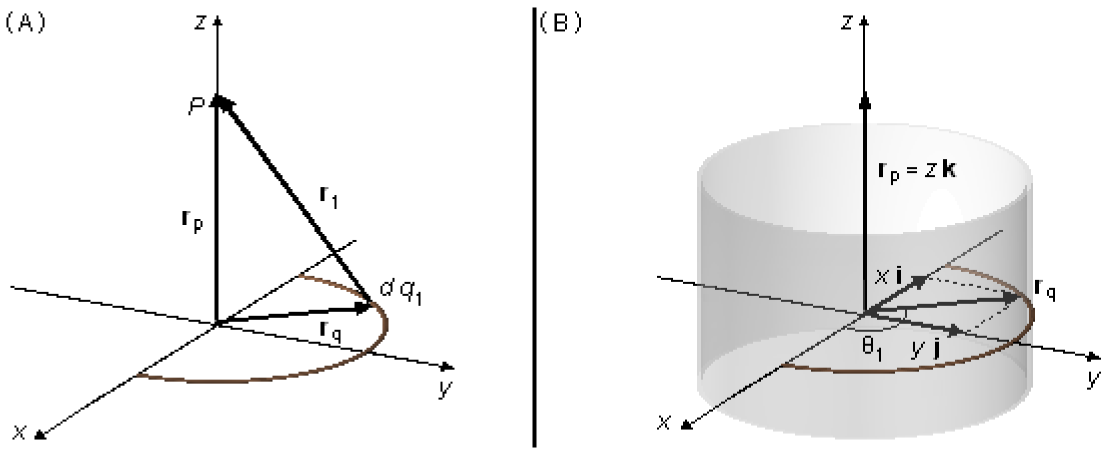


figura 1

Pela geometria do problema devemos escolher coordenadas cilíndricas (figura 1-B), o vetor $\mathbf{r}_q$, que está no plano xy, é escrito como $\mathbf{r}_q=x\;\mathbf{i}+y\;\mathbf{j}$ e o vetor $\mathbf{r}_p$ só possui componente na direção $\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_p=z\;\mathbf{k}$, então o vetor posição será

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1&=z\;\mathbf{k}-\left(x\;\mathbf{i}+y\;\mathbf{j}\right)\\ \mathbf{r}_1&=-x\;\mathbf{i}-y\;\mathbf{j}+z\;\mathbf{k}\end{aligned}\qquad\text{(I)}$$

Da expressão (I) o módulo do vetor posição $\mathbf{r}_1$ será

$$\begin{aligned}r_1^2&=x^2+y^2+z^2\\ r_1&=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\qquad\text{(II)}$$

onde x, y e z, em coordenadas cilíndricas, são dados por

$$x=a\cos\theta \quad , \quad y=a\,\operatorname{sen}\theta \quad , \quad z=z \tag{III}$$

O vetor campo elétrico desta metade do aro é dado por

$$\begin{gathered}\mathbf{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq_1}{r_1^2}\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}\\ \mathbf{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq_1}{r_1^3}\mathbf{r}_1\end{gathered} \tag{IV}$$

Da expressão da densidade linear de carga (λ_1) obtemos o elemento de carga dq_1

$$\begin{gathered}\lambda_1=\frac{dq_1}{ds_1}\\ dq_1=\lambda_1\,ds_1\end{gathered} \tag{V}$$

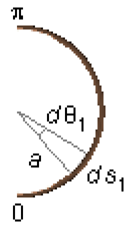


figura 2

onde ds_1 é um elemento de arco de ângulo $d\theta_1$ do aro (figura 2), assim

$$ds_1=a\,d\theta_1 \tag{VI}$$

substituindo (VI) em (V)

$$dq_1=\lambda_1\,a\,d\theta_1 \tag{VII}$$

substituindo (I), (II) e (VII) em (IV), temos

$$\begin{gathered}\mathbf{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda_1\,a\,d\theta_1}{\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^3}\left(-x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)\\ \mathbf{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda_1\,a\,d\theta_1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)\end{gathered} \tag{VIII}$$

substituindo as expressões de (III) em (VIII), vem

$$\mathbf{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda_1\,a\,d\theta_1}{\left[\left(a\cos\theta_1\right)^2+\left(a\,\operatorname{sen}\theta_1\right)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-a\cos\theta_1\,\mathbf{i}-a\,\operatorname{sen}\theta_1\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda_1\,a\,d\theta_1}{\left[a^2\cos^2\theta_1+a^2\operatorname{sen}^2\theta_1+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-a\cos\theta_1\,\mathbf{i}-a\,\operatorname{sen}\theta_1\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda_1\,a\,d\theta_1}{\left[a^2\underbrace{\left(\cos^2\theta_1+\operatorname{sen}^2\theta_1\right)}_{1}+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-a\cos\theta_1\,\mathbf{i}-a\,\operatorname{sen}\theta_1\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda_1\,a\,d\theta_1}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-a\cos\theta_1\,\mathbf{i}-a\,\operatorname{sen}\theta_1\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$

Como a densidade de carga λ_1 e o raio a são constantes, e, a integral não depende de z, depende apenas de θ_1, eles podem "sair" da integral, e sendo a integral da soma igual a soma das integrais podemos escrever

$$\mathbf{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda_1\,a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-a\int\cos\theta_1\,d\theta_1\,\mathbf{i}-a\int\operatorname{sen}\theta_1\,d\theta_1\,\mathbf{j}+z\int d\theta_1\,\mathbf{k}\right)$$

Os limites de integração, para esta metade do aro, serão 0 e π (meia volta conforme figura 2)

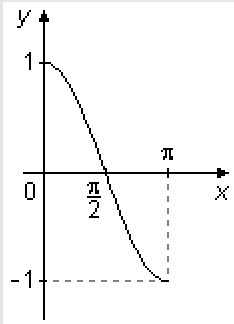
$$\mathbf{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda_1\,a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-a\int_0^\pi\cos\theta_1\,d\theta_1\,\mathbf{i}-a\int_0^\pi\operatorname{sen}\theta_1\,d\theta_1\,\mathbf{j}+z\int_0^\pi d\theta_1\,\mathbf{k}\right)$$

integração de $\displaystyle\int_0^\pi\cos\theta_1\,d\theta_1$

1.º método

$$\int_0^\pi\cos\theta_1\,d\theta_1=\operatorname{sen}\theta_1\Big|_0^\pi=\operatorname{sen}\pi-\operatorname{sen}0=0-0=0$$

2.º método



O gráfico de cosseno entre 0 e π possui uma área "positiva" acima do eixo *x*, entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, e uma área "negativa" abaixo do eixo *x*, entre $\frac{\pi}{2}$ e π, estas duas áreas se cancelam no cálculo da integral, sendo o valor da integral zero.

integração de $\displaystyle\int_0^\pi\operatorname{sen}\theta_1\,d\theta_1$

$$\int_0^\pi\operatorname{sen}\theta_1\,d\theta_1=-\cos\theta_1\Big|_0^\pi=-\left(\cos\pi-\cos0\right)=-\left(-1-1\right)=-\left(-2\right)=2$$

integração de $\displaystyle\int_0^\pi d\theta_1$

$$\int_0^\pi d\theta_1=\theta_1\Big|_0^\pi=\pi-0=\pi$$

$$\mathbf{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda_1\,a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-a\,0\,\mathbf{i}-2a\,\mathbf{j}+\pi z\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda_1\,a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-2a\,\mathbf{j}+\pi z\,\mathbf{k}\right)\qquad\text{(IX)}$$

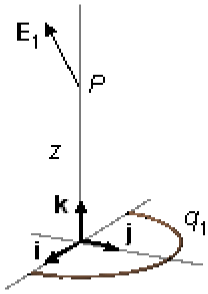


figura 3

- Para a metade do aro com carga q_2 entre π e 2π

Analogamente o vetor posição $\mathbf{r}_2$ será dado por $\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_p-\mathbf{r}_q$ (figura 4), como no primeiro caso.

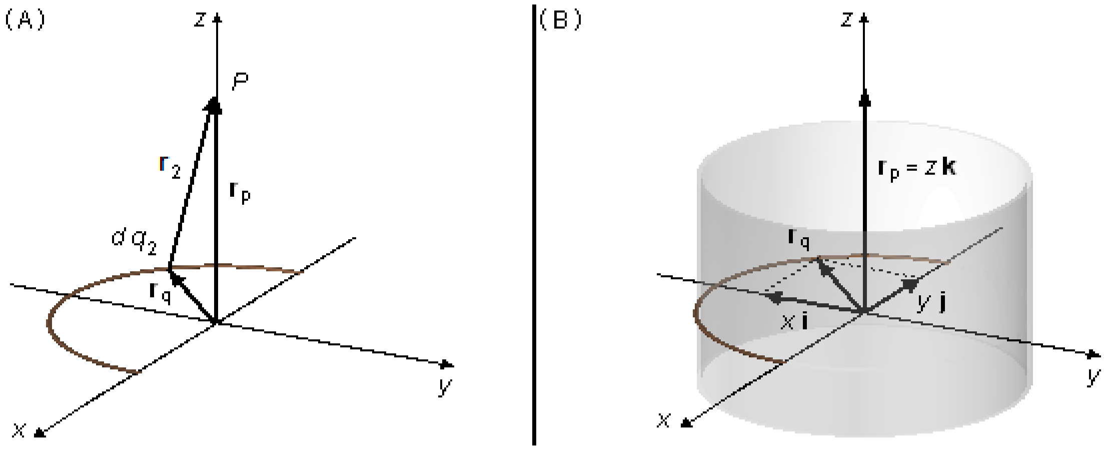


figura 4

E o vetor posição pode ser escrito como

$$\mathbf{r}_2=-x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k} \tag{X}$$

e seu módulo será dado pela expressão (II)

Usando a expressão (IV) para o campo elétrico desta metade do aro, temos

$$\mathbf{E}_2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq_2}{r_2^3}\,\mathbf{r}_2 \tag{XI}$$

Da expressão da densidade linear de carga (V) obtemos o elemento de carga dq_2

$$dq_2=\lambda_2\,ds_2 \tag{XII}$$

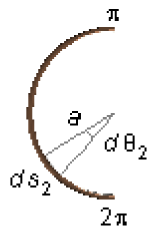


figura 5

substituindo (X), (II) e (XII) em (XI), temos uma expressão semelhante à expressão (VIII)

$$\mathbf{E}_2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda_2\,a\,d\theta_2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right) \tag{XIII}$$

substituindo as expressões de (III) em (XIII), e após as mesmas manipulações algébricas, temos

$$\mathbf{E}_2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda_2\,a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-a\int\cos\theta_2\,d\theta_2\,\mathbf{i}-a\int\operatorname{sen}\theta_2\,d\theta_2\,\mathbf{j}+z\int d\theta_2\,\mathbf{k}\right)$$

Os limites de integração, para esta metade do aro, serão π e 2π (meia volta conforme figura 5)

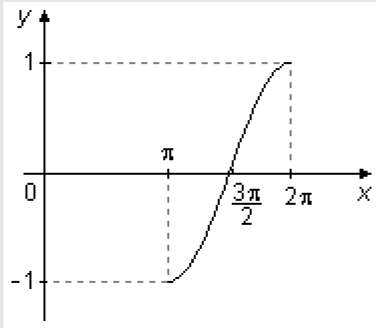
$$\mathbf{E}_2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda_2\,a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-a\int_{\pi}^{2\pi}\cos\theta_2\,d\theta_2\,\mathbf{i}-a\int_{\pi}^{2\pi}\operatorname{sen}\theta_2\,d\theta_2\,\mathbf{j}+z\int_{\pi}^{2\pi}d\theta_2\,\mathbf{k}\right)$$

integração de $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\cos\theta_2\,d\theta_2$

1.º método

$$\int_{\pi}^{2\pi}\cos\theta_2\,d\theta_2=\operatorname{sen}\theta_2\Big|_{\pi}^{2\pi}=\operatorname{sen}2\pi-\operatorname{sen}\pi=0-0=0$$

2.º método



O gráfico de cosseno entre π e 2π possui uma área "negativa" abaixo do eixo *x*, entre π e $\dfrac{3\pi}{2}$ e uma área "positiva" acima do eixo *x*, entre $\dfrac{3\pi}{2}$ e 2π, estas duas áreas se cancelam no cálculo da integral, sendo o valor da integral zero.

integração de $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\operatorname{sen}\theta_2\,d\theta_2$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\operatorname{sen}\theta_2\,d\theta_2=-\cos\theta_2\Big|_{\wedge pi}^{2\pi}=-(\cos2\pi-\cos\pi)=-[1-(-1)]=-(2)=-2$$

integração de $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}d\theta_2$

$$\int_{\pi}^{2\pi}d\theta_2=\theta_2\Big|_{\pi}^{2\pi}=2\pi-\pi=\pi$$

$$\mathbf{E}_2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda_2\,a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left[-a\,0\,\mathbf{i}-(-2)a\,\mathbf{j}+\pi z\,\mathbf{k}\right]$$

$$\mathbf{E}_2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda_2\,a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(2a\,\mathbf{j}+\pi z\,\mathbf{k}\right)\qquad\text{(XIV)}$$

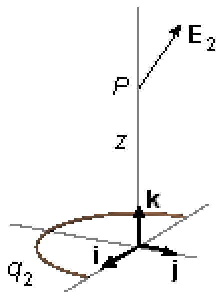


figura 6

O vetor campo elétrico total será dado pela soma das expressões (IX) e (XIV)

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda_1\,a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-2a\,\mathbf{j}+\pi z\,\mathbf{k}\right)+\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda_2\,a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(2a\,\mathbf{j}+\pi z\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-2a\lambda_1\,\mathbf{j}+\pi z\lambda_1\,\mathbf{k}+2a\lambda_2\,\mathbf{j}+\pi z\lambda_2\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left[2a\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\mathbf{j}+\pi z\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\mathbf{k}\right]\qquad\text{(XV)}$$

A carga total de cada metade do aro são q_1 e q_2 e o seus comprimentos são πa, assim a densidade linear de carga de cada metade pode ser escrita

$$\lambda_1=\frac{q_1}{\pi\,a}\qquad\text{e}\qquad\lambda_2=\frac{q_2}{\pi\,a}$$

substituindo estas expressões em (XV), temos

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left[2a\left(\frac{q_2}{\pi\,a}-\frac{q_1}{\pi\,a}\right)\mathbf{j}+\pi\,z\left(\frac{q_1}{\pi\,a}+\frac{q_2}{\pi\,a}\right)\mathbf{k}\right]$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{2a}{\pi\,a}\left(q_2-q_1\right)\mathbf{j}+\frac{\pi\,z}{\pi\,a}\left(q_1+q_2\right)\mathbf{k}\right]$$

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{2}{\pi}\left(q_2-q_1\right)\mathbf{j}+\frac{z}{a}\left(q_1+q_2\right)\mathbf{k}\right]}$$

Observação: se a carga q_1 for maior que a carga q_2, o termo na direção **j** será negativo ($q_2-q_1<0$) e o vetor campo elétrico estará “caído” para o – **j** (figura 7-A); se a carga q_1 for menor que a carga q_2, o termo na direção **j** será positivo ($q_2-q_1>0$) e o vetor campo elétrico estará “caído” para o **+j** (figura 7-B); se as cargas q_1 e q_2 forem iguais $\left(q_1=q_2=\frac{Q}{2}\right)$, cada metade do aro possui carga $\frac{Q}{2}$ então na expressão vetor campo elétrico

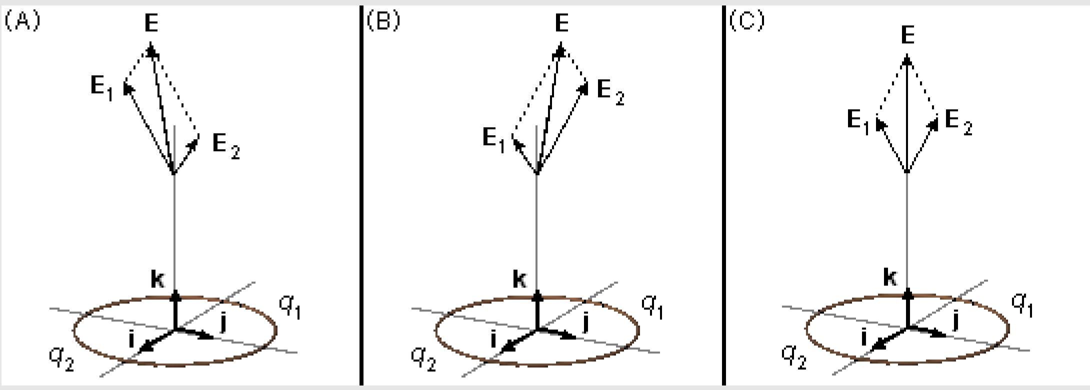


figura 7

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{2}{\pi}\underbrace{\left(\frac{Q}{2}-\frac{Q}{2}\right)}_{0}\mathbf{j}+\frac{z}{a}\underbrace{\left(\frac{Q}{2}+\frac{Q}{2}\right)}_{2Q}\mathbf{k}\right]$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{2}{\pi}.0\;\mathbf{j}+\frac{z}{a}\,2\,\frac{Q}{2}\,\mathbf{k}\right]$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{z}{a}Q\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\,z}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{k}$$

e assim se obtém o resultado para o vetor campo elétrico de um aro uniformemente carregado. (figura 7-C).