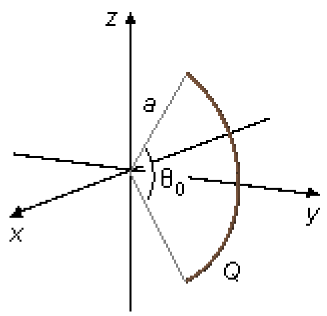
Seja um arco de circunferência de raio a e ângulo central θ_0 carregado com uma carga Q distribuída uniformemente ao longo do arco. Determine:
a) O vetor campo elétrico nos pontos da reta que passa pelo centro do arco e é perpendicular ao plano que contém o arco;
b) O vetor campo elétrico no centro de curvatura do arco;
c) O vetor campo elétrico quando o ângulo central tende a zero.



Dados do problema

- raio do arco: a;
- ângulo central do arco: θ_0;
- carga do arco: Q.

Esquema do problema

O vetor posição $\mathbf{r}$ vai de um elemento de carga do aro dq até o ponto P onde se deseja calcular o campo elétrico, o vetor $\mathbf{r}_q$ localiza o elemento de carga em relação à origem do referencial e o vetor $\mathbf{r}_p$ localiza o ponto P, assim pela figura 1-A

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_p-\mathbf{r}_q$$

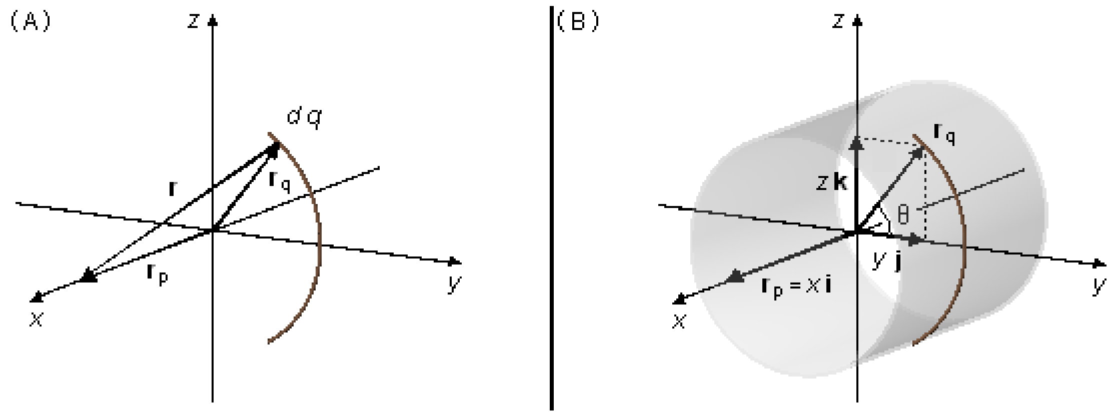


figura 1

Pela geometria do problema devemos escolher coordenadas cilíndricas (figura 1-B), o vetor $\mathbf{r}_q$, que está no plano yz, é escrito como $\mathbf{r}_q=y\ \mathbf{j}+z\ \mathbf{k}$ e o vetor $\mathbf{r}_p$ só possui componente na direção $\mathbf{i}$, $\mathbf{r}_p=x\ \mathbf{i}$ (ao contrário do que se faz usualmente onde o vetor $\mathbf{r}_q$ está no plano xy e o eixo do cilindro na direção $\mathbf{k}$), então o vetor posição será

$$\mathbf{r}=x\ \mathbf{i}-\left(y\ \mathbf{j}+z\ \mathbf{k}\right)$$
$$\mathbf{r}=x\ \mathbf{i}-y\ \mathbf{j}-z\ \mathbf{k} \qquad \text{(I)}$$

Da expressão (I) o módulo do vetor posição $\mathbf{r}$ será

$$r^2=x^2+y^2+z^2$$
$$r=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(II)}$$

onde x, y e z, em coordenadas cilíndricas, são dados por

$$x=x \quad , \quad y=a\cos\theta \quad , \quad z=a\operatorname{sen}\theta \qquad \text{(III)}$$

Solução

a) O vetor campo elétrico é dado por

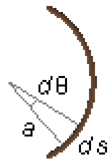
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^3}\mathbf{r} \qquad \text{(IV)}$$

Da expressão da densidade linear de carga (λ) obtemos o elemento de carga dq

$$\lambda=\frac{dq}{ds}$$

$$dq=\lambda\, ds \qquad \text{(V)}$$



onde ds é um elemento de arco de ângulo $d\theta$ do arco (figura 2), assim

$$ds=a\,d\theta \qquad \text{(VI)}$$

figura 2

substituindo (VI) em (V)

$$dq=\lambda\, a\, d\theta \qquad \text{(VII)}$$

substituindo (I), (II) e (VII) em (IV), temos

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\, a\, d\theta}{\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^3}\left(x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}-z\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\, a\, d\theta}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}-z\,\mathbf{k}\right) \qquad \text{(VIII)}$$

substituindo as expressões de (III) em (VIII), vem

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\, a\, d\theta}{\left[x^2+\left(a\cos\theta\right)^2+\left(a\,\mathrm{sen}\,\theta\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(x\,\mathbf{i}-a\cos\theta\,\mathbf{j}-a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\, a\, d\theta}{\left[x^2+a^2\cos^2\theta+a^2\,\mathrm{sen}^2\theta\right]^{\frac{3}{2}}}\left(x\,\mathbf{i}-a\cos\theta\,\mathbf{j}-a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\, a\, d\theta}{\left[x^2+a^2\underbrace{\left(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta\right)}_{1}\right]^{\frac{3}{2}}}\left(x\,\mathbf{i}-a\cos\theta\,\mathbf{j}-a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\, a\, d\theta}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(x\,\mathbf{i}-a\cos\theta\,\mathbf{j}-a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{k}\right)$$

Como a densidade de carga λ e o raio a são constantes, e, a integral não depende de x, depende apenas de θ, eles podem "sair" da integral, e sendo a integral da soma igual a soma das integrais podemos escrever

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, a}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(x\int d\theta\,\mathbf{i}-a\int\cos\theta\, d\theta\,\mathbf{j}-a\int\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\,\mathbf{k}\right)$$

Como existe simetria podemos dividir o ângulo central θ_0 em duas partes medindo $\dfrac{\theta_0}{2}$ no sentido horário e $-\dfrac{\theta_0}{2}$ no sentido anti-horário (figura 3), assim os limites de integração serão $-\dfrac{\theta_0}{2}$ e $\dfrac{\theta_0}{2}$

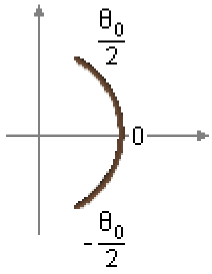


figura 3

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda a}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(x\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}}d\theta\,\mathbf{i}-a\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}}\cos\theta\,d\theta\,\mathbf{j}-a\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}}\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,\mathbf{k}\right)$$

integração de $\displaystyle\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}}d\theta$

$$\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}}d\theta=\frac{\theta_0}{2}-\left(-\frac{\theta_0}{2}\right)=\frac{\theta_0}{2}+\frac{\theta_0}{2}=2\,\frac{\theta_0}{2}=\theta_0$$

integração de $\displaystyle\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}}\cos\theta\,d\theta$

$$\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}}\cos\theta\,d\theta=\operatorname{sen}\theta\,\Big|_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}}=\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}-\operatorname{sen}\left(-\frac{\theta_0}{2}\right)$$

a função seno é uma função ímpar, quer dizer $f(-x)=-f(x)$, então, $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\theta_0}{2}\right)=-\operatorname{sen}\dfrac{\theta_0}{2}$

$$\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}}\cos\theta\,d\theta=\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}-\left[-\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\right]=\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}+\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}$$

integração de $\displaystyle\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$

$$\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}}\operatorname{sen}\theta\,d\theta=-\cos\theta\,\Big|_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}}=-\left[\cos\frac{\theta_0}{2}-\cos\left(-\frac{\theta_0}{2}\right)\right]$$

a função cosseno é uma função par, quer dizer $f(x)=f(-x)$, então, $\cos\left(-\dfrac{\theta_0}{2}\right)=\cos\dfrac{\theta_0}{2}$

$$\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}}\operatorname{sen}\theta\,d\theta=-\left[\cos\frac{\theta_0}{2}-\cos\frac{\theta_0}{2}\right]=0$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\,a}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(x\theta_0\,\mathbf{i}-2a\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\,\mathbf{j}-0\,\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\,a}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(x\theta_0\,\mathbf{i}-2a\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\,\mathbf{j}\right) \tag{IX}$$

Observação: a integral na direção **k** é igual a zero porque um elemento de carga dq, produz num ponto, um elemento do campo que pode ser decomposto em elementos $d\mathbf{E}_\mathbf{x}$, $-d\mathbf{E}_\mathbf{y}$ e $-d\mathbf{E}_\mathbf{z}$ (figura 4-A). Um outro elemento de carga colocado numa posição simétrica produz, no mesmo ponto, um outro elemento do campo que pode ser decomposto em elementos $d\mathbf{E}_\mathbf{x}$, $-d\mathbf{E}_\mathbf{y}$ e $d\mathbf{E}_\mathbf{z}$ (figura 4-B), assim os elementos na direção **k** se anulam e apenas os elementos nas direções **i** e **j** contribuem para o campo total.

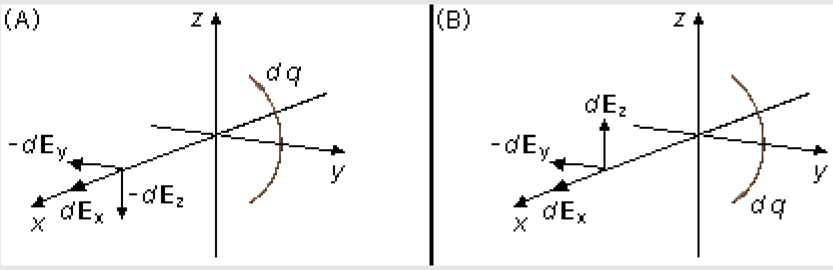


figura 4

A carga total do arco é Q e o seu comprimento é $a\,\theta_0$, assim a densidade linear de carga pode ser escrita

$$\lambda=\frac{Q}{a\,\theta_0} \tag{X}$$

substituindo (X) em (IX)

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a\,\theta_0}\frac{a}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(x\theta_0\,\mathbf{i}-2a\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\,\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{\theta_0}x\theta_0\,\mathbf{i}-\frac{1}{\theta_0}2a\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\,\mathbf{j}\right)$$

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(x\,\mathbf{i}-\frac{2a}{\theta_0}\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\,\mathbf{j}\right)}$$

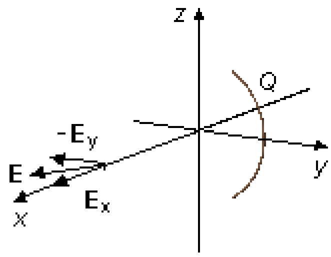


figura 5

b) No centro de curvatura temos $x=0$, substituindo na solução do item anterior, temos

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\left(0^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0\,\mathbf{i}-\frac{2a}{\theta_0}\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\,\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a^3}\frac{2a}{\theta_0}\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\,\mathbf{j}$$

$$\boxed{\mathbf{E}=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a^2}\frac{2}{\theta_0}\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\,\mathbf{j}}$$

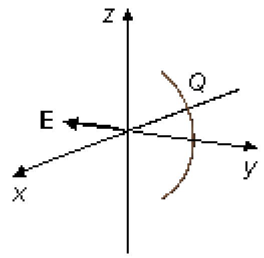


figura 6

c) Quando o ângulo central tende a zero ($\theta_0\rightarrow 0$), o arco tende a uma carga pontual, aplicando o limite à solução do item anterior, obtemos (figura 7)

$$\mathbf{E}=\lim_{\theta_0\rightarrow 0}\;-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a^2}\frac{2}{\theta_0}\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\,\mathbf{j}$$

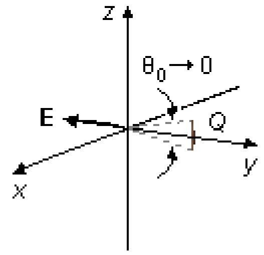


figura 7

invertendo o termo $\frac{2}{\theta_0}$ e passando para o denominador, escrevemos

$$\mathbf{E}=\lim_{\theta_0\rightarrow 0}\;-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}}{\frac{\theta_0}{2}}\,\mathbf{j}$$

lembrando do *Limite Fundamental* $\lim\limits_{x\rightarrow 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a^2}\underbrace{\lim_{\theta_0\rightarrow 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}}{\frac{\theta_0}{2}}}_{1}\,\mathbf{j}$$

$$\boxed{\mathbf{E}=-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\,\mathbf{j}}$$

e o resultado se reduz ao vetor campo elétrico de uma carga pontual.