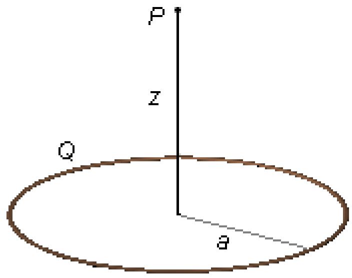
Um aro de raio *a* está carregado uniformemente com uma carga *Q*. Calcule o vetor campo elétrico num ponto *P* sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano do aro a uma distância *z* do seu centro.



Dados do problema

- raio do aro: *a*;
- carga do aro: *Q*;
- distância ao ponto onde se quer o campo elétrico: *z*.

Esquema do problema

O vetor posição **r** vai de um elemento de carga do aro $d\,q$ até o ponto *P* onde se deseja calcular o campo elétrico, o vetor $\mathbf{r}_{\,\mathrm{q}}$ localiza o elemento de carga em relação à origem do referencial e o vetor $\mathbf{r}_{\mathrm{p}}$ localiza o ponto *P*, assim pela figura 1-A

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\,\mathrm{p}}-\mathbf{r}_{\,\mathrm{q}}$$

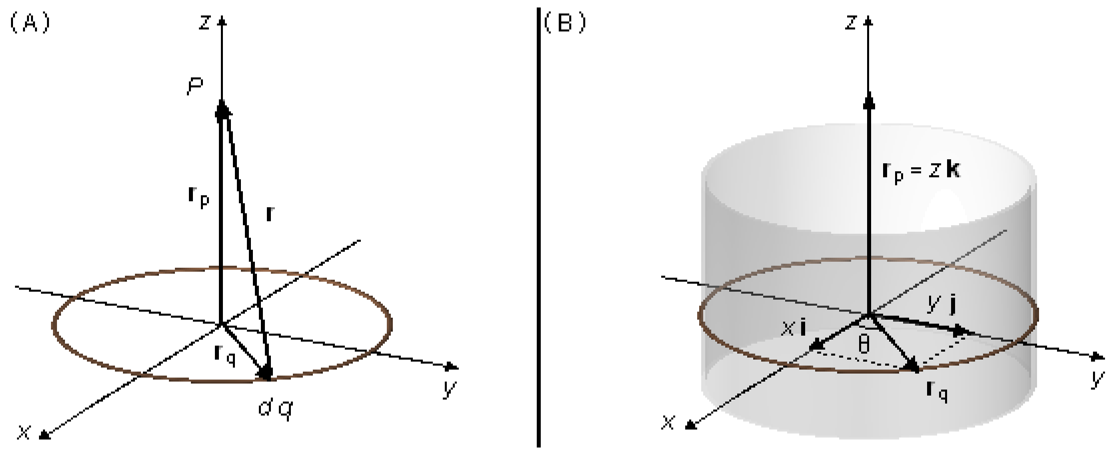


figura 1

Pela geometria do problema devemos escolher coordenadas cilíndricas (figura 1-B), o vetor $\mathbf{r}_{\,\mathrm{q}}$, que está no plano *xy*, é escrito como $\mathbf{r}_{\,\mathrm{q}}=x\;\mathbf{i}+y\;\mathbf{j}$ e o vetor $\mathbf{r}_{\,\mathrm{p}}$ só possui componente na direção **k**, $\mathbf{r}_{\,\mathrm{p}}=z\;\mathbf{k}$, então o vetor posição será

$$\begin{aligned}\mathbf{r}&=z\;\mathbf{k}-\left(x\;\mathbf{i}+y\;\mathbf{j}\right)\\ \mathbf{r}&=-x\;\mathbf{i}-y\;\mathbf{j}+z\;\mathbf{k}\end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Da expressão (I) o módulo do vetor posição **r** será

$$\begin{aligned}r^{2}&=x^{2}+y^{2}+z^{2}\\ r&=\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

onde *x*, *y* e *z*, em coordenadas cilíndricas, são dados por

$$x=a\cos\theta \quad , \quad y=a\operatorname{sen}\theta \quad , \quad z=z \qquad \text{(III)}$$

Solução

O vetor campo elétrico é dado por

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^3}\,\mathbf{r} \qquad \text{(IV)}$$

Da expressão da densidade linear de carga (λ) obtemos o elemento de carga dq

$$\lambda=\frac{dq}{ds}$$
$$dq=\lambda\,ds \qquad \text{(V)}$$

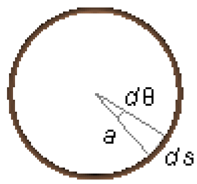


figura 2

onde ds é um elemento de arco de ângulo $d\theta$ do aro (figura 2), assim

$$ds=a\,d\theta \qquad \text{(VI)}$$

substituindo (VI) em (V)

$$dq=\lambda\,a\,d\theta \qquad \text{(VII)}$$

substituindo (I), (II) e (VII) em (IV), temos

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\,a\,d\theta}{\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^3}\left(-x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\,a\,d\theta}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right) \qquad \text{(VIII)}$$

substituindo as expressões de (III) em (VIII), vem

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\,a\,d\theta}{\left[\left(a\cos\theta\right)^2+\left(a\,\mathrm{sen}\,\theta\right)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-a\cos\theta\,\mathbf{i}-a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\,a\,d\theta}{\left[a^2\cos^2\theta+a^2\,\mathrm{sen}^2\theta+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-a\cos\theta\,\mathbf{i}-a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\,a\,d\theta}{\left[a^2\underbrace{\left(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta\right)}_{1}+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-a\cos\theta\,\mathbf{i}-a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\,a\,d\theta}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-a\cos\theta\,\mathbf{i}-a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$

Como a densidade de carga λ e o raio a são constantes, e, a integral não depende de z, depende apenas de θ, eles podem “sair” da integral, e sendo a integral da soma igual a soma das integrais podemos escrever

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\,a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-a\int\cos\theta\,d\theta\,\mathbf{i}-a\int\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\,\mathbf{j}+z\int d\theta\,\mathbf{k}\right)$$

Os limites de integração serão 0 e 2π (uma volta completa no aro)

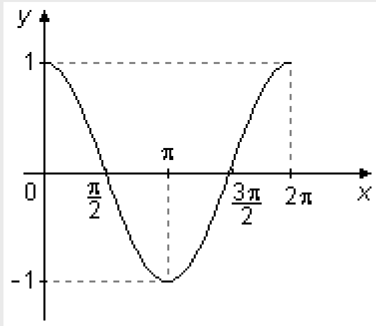
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-a\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta}_{0}\,\mathbf{i}-a\underbrace{\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta\,d\theta}_{0}\,\mathbf{j}+z\int_0^{2\pi}d\theta\,\mathbf{k}\right)$$

integração de $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta$

1.º método

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{2\pi}=\operatorname{sen}2\pi-\operatorname{sen}0=0-0=0$$

2.º método



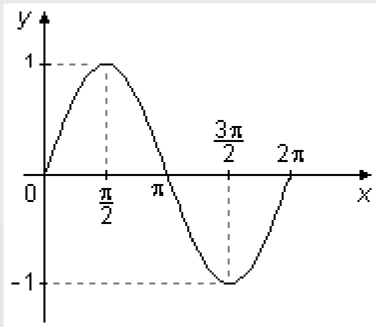
O gráfico de cosseno entre 0 e 2π possui uma área "positiva" acima do eixo *x*, entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ e entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, e uma área "negativa" abaixo do eixo *x*, entre $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, estas duas áreas se cancelam no cálculo da integral, sendo o valor da integral zero.

integração de $\displaystyle\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$

1.º método

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta\,d\theta=-\cos\theta\Big|_0^{2\pi}=-\left(\cos2\pi-\cos0\right)=-\left(1-1\right)=0$$

2.º método



O gráfico do seno entre 0 e 2π possui uma área "positiva" acima do eixo *x*, entre 0 e π, e uma área "negativa" abaixo do eixo *x*, entre π e 2π, estas duas áreas se cancelam no cálculo da integral, sendo o valor da integral zero.
Observação: as duas integrais, nas direções **i** e **j**, que são nulas, representam o cálculo matemático para a afirmação que se faz usualmente de que as componentes do campo elétrico paralelas ao plano *xy* ($d\,\mathbf{E}_{\text{P}}$) se anulam. Apenas as componentes normais ao plano ($d\,\mathbf{E}_{\text{N}}$) contribuem para o campo elétrico total (figura 3 - abaixo).

integração de $\displaystyle\int_0^{2\pi}d\theta$

$$\int_0^{2\pi}d\theta=\theta\Big|_0^{2\pi}=2\pi-0=2\pi$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, a}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}2\pi z\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi\,\lambda\, a\, z}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\ \mathbf{k} \qquad \text{(IX)}$$

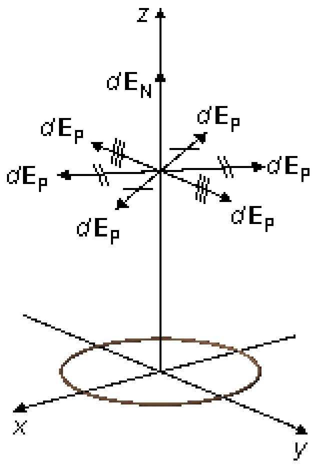


figura 3

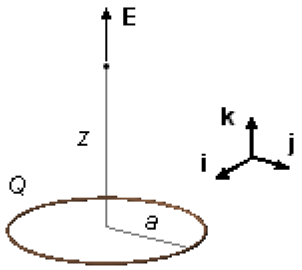


figura 4

A carga total do aro é Q e o seu comprimento é $2\pi a$, assim a densidade linear de carga pode ser escrita

$$\lambda=\frac{Q}{2\pi\, a}$$

$$Q=2\pi\, a\,\lambda \qquad \text{(X)}$$

substituindo (X) em (IX)

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\, z}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\ \mathbf{k}}$$