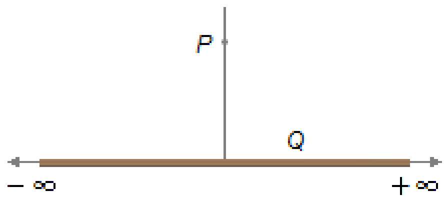
Uma carga Q está distribuída uniformemente ao longo de um fio reto de comprimento infinito. Determinar o vetor campo elétrico nos pontos situados sobre uma reta perpendicular ao fio.



Dados do problema

- carga do fio: Q.

Esquema do problema

O vetor posição $\mathbf{r}$ vai de um elemento de carga dq do fio até o ponto P onde se deseja calcular o campo elétrico, o vetor $\mathbf{r}_q$ localiza o elemento de carga em relação à origem do referencial e o vetor $\mathbf{r}_p$ localiza o ponto P (figura1-A)

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_p-\mathbf{r}_q$$

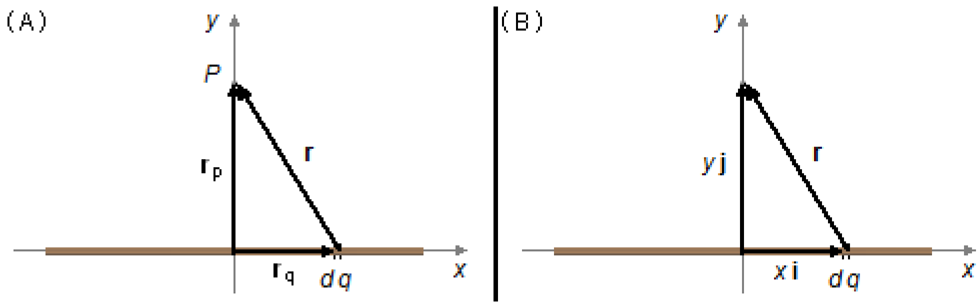


figura 1

Pela geometria do problema devemos escolher coordenadas cartesianas, o vetor $\mathbf{r}_q$ só possui componente na direção $\mathbf{i}$, é escrito como $\mathbf{r}_q=x\ \mathbf{i}$ e o vetor $\mathbf{r}_p$ só possui componente na direção $\mathbf{j}$, é escrito como $\mathbf{r}_p=y\ \mathbf{j}$ (figura 1-B), então o vetor posição será

$$\mathbf{r}=y\ \mathbf{j}-x\ \mathbf{i} \tag{I}$$

Da expressão (I) o módulo do vetor posição $\mathbf{r}$ será

$$r^2=x^2+y^2$$
$$r=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{II}$$

Solução

O vetor campo elétrico do fio é dado por

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^3}\mathbf{r} \tag{III}$$

Da expressão da densidade linear de carga (λ) obtemos o elemento de carga dq

$$\lambda=\frac{dq}{ds}$$

$$d q=\lambda\ d s \tag{IV}$$

onde $d s$ é um elemento de comprimento do fio, assim

$$d s=d x \tag{V}$$

substituindo (V) em (IV)

$$d q=\lambda\ d x \tag{VI}$$

substituindo (I), (II) e (VI) em (III), temos

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\ d x}{\left[\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^3}\left(-x\ \mathbf{i}+y\ \mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\ d x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-x\ \mathbf{i}+y\ \mathbf{j}\right) \tag{VII}$$

Como a densidade de carga λ é constante, a integral depende apenas de x, ela pode "sair" da integral, podemos escrever

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{d x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-x\ \mathbf{i}+y\ \mathbf{j}\right)$$

O vetor posição **r** que vai de um elemento de carga $d q$ até o ponto P deve varrer todo o fio de $-\infty$ a $+\infty$ (figura 2).

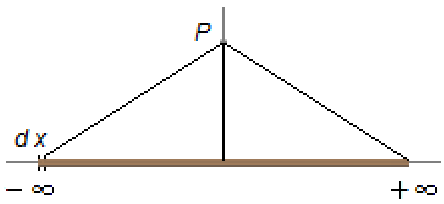


figura 2

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-x\ \mathbf{i}+y\ \mathbf{j}\right)$$

colocando y em evidência no numerador e y^2 no denominador, temos

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d x}{\left[y^2\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}\ y\left(-\frac{x}{y}\ \mathbf{i}+\ \mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d x}{\left(y^2\right)^{\frac{3}{2}}\left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\ y\left(-\frac{x}{y}\ \mathbf{i}+\ \mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d x}{y^3\left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\ y\left(-\frac{x}{y}\ \mathbf{i}+\ \mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{d x}{y^2\left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{x}{y}\ \mathbf{i}+\ \mathbf{j}\right) \tag{VIII}$$

Considerando o ângulo θ medido entre o eixo y e a distância r do elemento de carga $d q$ ao ponto P, a tangente deste ângulo será (figura 3)

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{x}{y} \tag{IX}$$

substituindo a expressão (IX) em (VIII), temos

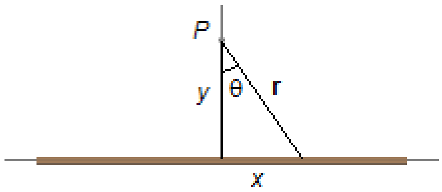


figura 3

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{y^2\left[1+(\operatorname{tg}\theta)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-\operatorname{tg}\theta\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{y^2\left(1+\operatorname{tg}^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-\operatorname{tg}\theta\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right) \tag{X}$$

A partir da expressão (IX) obtemos o elemento de comprimento dx em relação ao elemento de arco $d\theta$ fazendo a mudança de variável

$$x=y\operatorname{tg}\theta$$

derivada de $\operatorname{tg}\theta$ em relação a θ

re-escrevendo $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, temos a derivada de um quociente de funções dada pela fórmula

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$(\operatorname{tg}\theta)'=\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)'=\frac{\cos\theta\cos\theta-\operatorname{sen}\theta(-\operatorname{sen}\theta)}{(\cos\theta)^2}=\frac{\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

Observação: via de regra os livros de *Cálculo Integral e Diferencial* apresentam a derivada da tangente na forma $(\operatorname{tg}\theta)'=\sec^2\theta$, onde $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$, mas aqui por razões de simplificações posteriores vamos deixar a derivada na forma mostrada acima.

$$dx=y\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \tag{XI}$$

substituindo a definição da tangente e a expressão (XI) em (X), temos

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2\left[1+\left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,y\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y\left[1+\left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

O vetor posição **r** que vai de um elemento de carga dq até o ponto *P* forma um ângulo θ com o eixo *y*. Conforme o elemento dq se desloca da origem em direção a $\pm\infty$ o ângulo vai aumento e tende a $\dfrac{\pi}{2}$. Os extremos de integração para a variável θ devem variar de $-\dfrac{\pi}{2}$, o valor máximo medido no sentido horário, quando *x* vale $-\infty$ até $\dfrac{\pi}{2}$ o valor máximo medido no sentido anti-horário, quando *x* vale $+\infty$ (figura 4)

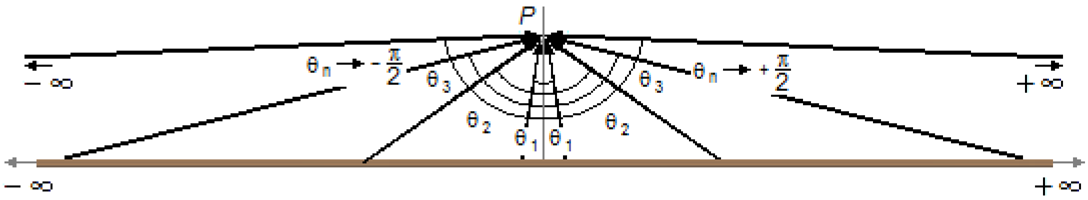


figura 4

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{y\left(1+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{y\left(\frac{\cos^2+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{y\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{y\,\frac{1}{\left(\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{y\,\frac{1}{\cos^3\theta}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{y\,\frac{1}{\cos\theta}}\,d\theta\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{y}\,d\theta\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

Como y é constante, a integral depende só de θ, ele pode “sair” da integral e sendo a integral da soma igual a soma das integrais podemos escrever

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y}\left(-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,d\theta\,\mathbf{i}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\,\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y}\left(\underbrace{-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,\mathbf{i}}_{0}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\,\mathbf{j}\right)$$

integração de $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta$

1.º método

Como a função cosseno é uma função par, $f(x)=f(-x)$, podemos integrar sobre metade do intervalo $\left(\text{de } 0 \text{ à } \frac{\pi}{2}\right)$ e multiplicar a integral por 2

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=2\operatorname{sen}\theta\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=2\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}0\right)=2\,(1-0)=2$$

2.º método

Podemos integrar sobre todo intervalo $\left(\text{de } -\frac{\pi}{2} \text{ à } \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\operatorname{sen}\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

como seno é uma funcão ímpar, $f(-x)=-f(x)$, temos que $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-\left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1+1=2$$

integração de $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$

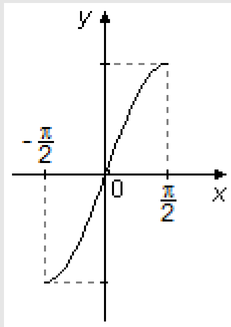
1.º método

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\theta\,d\theta=-\cos\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=-\left[\cos\frac{\pi}{2}-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

como coseno é uma funcão par, $f\,(x)=f\,(-x)$, temos que $\cos\dfrac{\pi}{2}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\theta\;d\theta=-\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\right)=0$$

2.º método



O gráfico do seno entre $-\dfrac{\pi}{2}$ e 0 possui uma área “negativa” abaixo do eixo-*x* e entre 0 e $\dfrac{\pi}{2}$ uma área “positiva” acima do eixo-*x* estas duas áreas se cancelam no cálculo da integral, sendo o valor da integral zero. na direção **i**.

Observação: a integral na direção **i**, que é nula, representa o cálculo matemático para a afirmação que se faz usualmente de que as componentes do campo elétrico paralelas ao eixo-*x* ($d\,\mathbf{E}_{P}$) se anulam. Apenas as componentes normais ao eixo-*x* ($d\,\mathbf{E}_{N}$) contribuem para o campo elétrico total (figura 5 abaixo).

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0\,y}\left(-0\,\mathbf{i}+2\,\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0\,y}\,2\,\mathbf{j}$$

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\,y}\,\mathbf{j}}$$

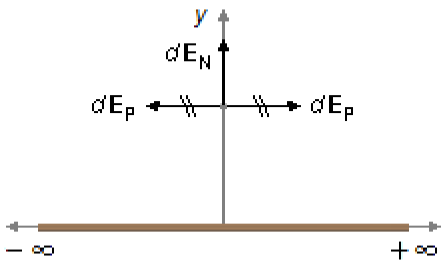


figura 5