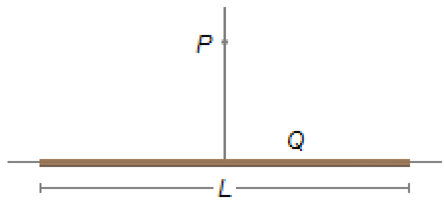
Uma carga $Q$ está distribuída uniformemente ao longo de um fio reto de comprimento $L$. Determinar o vetor campo elétrico nos pontos situados sobre a reta perpendicular ao fio e que passa pelo meio do fio.




Dados do problema

- comprimento do fio: $L$;
- carga do fio: $Q$.

Esquema do problema

O vetor posição **r** vai de um elemento de carga $dq$ do fio até o ponto $P$ onde se deseja calcular o campo elétrico, o vetor $\mathbf{r}_q$ localiza o elemento de carga em relação à origem do referencial e o vetor $\mathbf{r}_p$ localiza o ponto $P$ (figura1-A)

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_p-\mathbf{r}_q$$

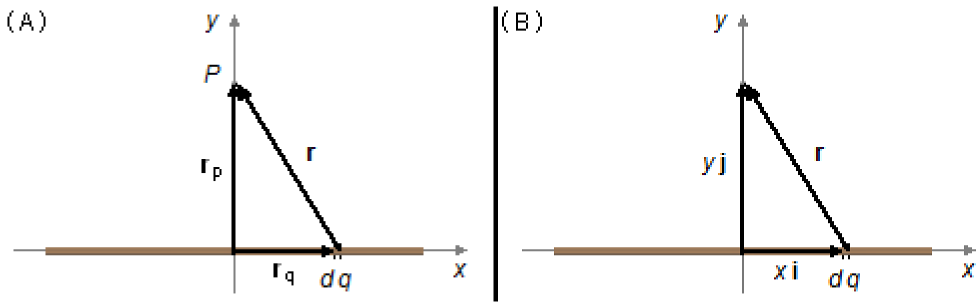



figura 1

Pela geometria do problema devemos escolher coordenadas cartesianas, o vetor $\mathbf{r}_q$ só possui componente na direção **i**, é escrito como $\mathbf{r}_q=x\,\mathbf{i}$ e o vetor $\mathbf{r}_p$ só possui componente na direção **j**, é escrito como $\mathbf{r}_p=y\,\mathbf{j}$ (figura 1-B), então o vetor posição será

$$\mathbf{r}=y\,\mathbf{j}-x\,\mathbf{i} \tag{I}$$

Da expressão (I) o módulo do vetor posição **r** será

$$r^2=x^2+y^2$$
$$r=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{II}$$

Solução

O vetor campo elétrico do fio é dado por

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^3}\,\mathbf{r} \tag{III}$$

Da expressão da densidade linear de carga ($\lambda$) obtemos o elemento de carga $dq$

$$\lambda=\frac{d\,q}{d\,s}$$
$$d\,q=\lambda\;d\,s \qquad \text{(IV)}$$

onde $d\,s$ é um elemento de comprimento do fio, assim

$$d\,s=d\,x \qquad \text{(V)}$$

substituindo (V) em (IV)

$$d\,q=\lambda\;d\,x \qquad \text{(VI)}$$

substituindo (I), (II) e (VI) em (III), temos

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\;d\,x}{\left[\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^3}\left(-x\;\mathbf{i}+y\;\mathbf{j}\right)$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda\;d\,x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-x\;\mathbf{i}+y\;\mathbf{j}\right) \qquad \text{(VII)}$$

Como a densidade de carga $\lambda$ é constante, a integral depende apenas de $x$, ela pode "sair" da integral, podemos escrever

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{d\,x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-x\;\mathbf{i}+y\;\mathbf{j}\right)$$

Como o ponto $P$ está sobre a reta que divide o fio ao meio a integral será feita sobre todos os elementos de comprimento $d\,x$ indo de $-\frac{L}{2}$ até $\frac{L}{2}$ (figura 2)

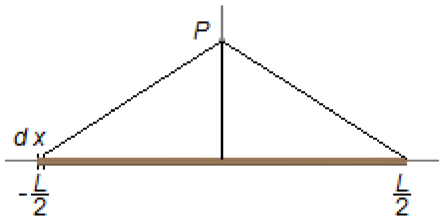


figura 2

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{d\,x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-x\;\mathbf{i}+y\;\mathbf{j}\right)$$

colocando $y$ em evidência no numerador e $y^2$ no denominador, temos

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{d\,x}{\left[y^2\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}\,y\left(-\frac{x}{y}\;\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{d\,x}{\left(y^2\right)^{\frac{3}{2}}\left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,y\left(-\frac{x}{y}\;\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$
$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{d\,x}{y^3\left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,y\left(-\frac{x}{y}\;\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{dx}{y^2\left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{x}{y}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right) \tag{VIII}$$

Considerando o ângulo $\theta$ medido entre o eixo-*y* e a distância *R* do elemento de carga $dq$ ao ponto *P*, a tangente deste ângulo será (figura 3)

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{x}{y} \tag{IX}$$

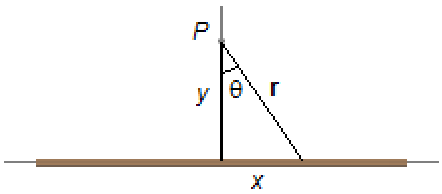


figura 3

substituindo a expressão (IX) em (VIII), temos

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{dx}{y^2\left[1+\left(\operatorname{tg}\theta\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-\operatorname{tg}\theta\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{dx}{y^2\left(1+\operatorname{tg}^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-\operatorname{tg}\theta\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right) \tag{X}$$

A partir da expressão (IX) obtemos o elemento de comprimento $dx$ em relação ao elemento de arco $d\theta$ fazendo a mudança de variável

$$x=y\,\operatorname{tg}\theta$$

derivada de $\operatorname{tg}\theta$ em relação a $\theta$

re-escrevendo $\operatorname{tg}\theta=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, temos a derivada de um quociente de funções dada pela fórmula

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-u\,v'}{v^2}$$

$$\left(\operatorname{tg}\theta\right)'=\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)'=\frac{\cos\theta\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\left(-\operatorname{sen}\theta\right)}{\left(\cos\theta\right)^2}=\frac{\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

***Observação:*** via de regra os livros de *Cálculo Integral e Diferencial* apresentam a derivada da tangente na forma $\left(\operatorname{tg}\theta\right)'=\sec^2\theta$, onde $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$, mas aqui por razões de simplificações posteriores vamos deixar a derivada na forma mostrada acima.

$$dx=y\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \tag{XI}$$

substituindo a definição da tangente e a expressão (XI) em (X), temos

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{1}{y^2\left[1+\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,y\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{1}{y\left[1+\left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

Os extremos de integração para a variável $\theta$ devem variar de $-\theta_m$, o valor máximo medido no sentido horário, quando $x$ vale $-\dfrac{L}{2}$ até $\theta_m$, o valor máximo medido no sentido anti-horário, quando $x$ vale $\dfrac{L}{2}$ (figura 4)

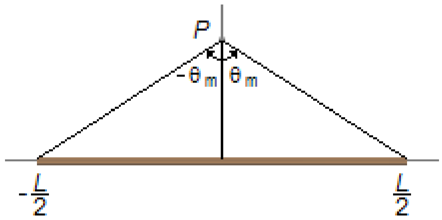


figura 4

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{1}{y\left(1+\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{1}{y\left(\dfrac{\cos^2+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{1}{y\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{1}{y\,\dfrac{1}{\left(\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{1}{y\,\dfrac{1}{\cos^3\theta}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{1}{y\,\dfrac{1}{\cos\theta}}\,d\theta\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\frac{\cos\theta}{y}\,d\theta\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

Como $y$ é constante, a integral depende só de $\theta$, ele pode "sair" da integral e sendo a integral da soma igual a soma das integrais podemos escrever

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y}\left(-\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\cos\theta\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,d\theta\,\mathbf{i}+\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\cos\theta\,d\theta\,\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y}\left(-\underbrace{\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\operatorname{sen}\theta\, d\theta}_{0}\ \mathbf{i}+\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\cos\theta\, d\theta\ \mathbf{j}\right)$$

integração de $\displaystyle\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\cos\theta\, d\theta$

**1.º método**

Como a função cosseno é uma função par, $f(x)=f(-x)$, podemos integrar sobre metade do intervalo (de 0 à $\theta_m$) e multiplicar a integral por 2

$$2\int_0^{\theta_m}\cos\theta\, d\theta=2\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{\theta_m}=2(\operatorname{sen}\theta_m-\operatorname{sen}0)=2(\operatorname{sen}\theta_m-0)=2\operatorname{sen}\theta_m$$

**2.º método**

Podemos integrar sobre todo intervalo (de – $\theta_m$ à $\theta_m$)

$$\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\cos\theta\, d\theta=\operatorname{sen}\theta\Big|_{-\theta_m}^{\theta_m}=\operatorname{sen}\theta_m-\operatorname{sen}(-\theta_m)$$

como seno é uma funcão ímpar, $f(-x)=-f(x)$, temos que $\operatorname{sen}(-\theta_m)=-\operatorname{sen}(\theta_m)$

$$\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\cos\theta\, d\theta=\operatorname{sen}\theta_m-(-\operatorname{sen}\theta_m)=\operatorname{sen}\theta_m+\operatorname{sen}(\theta_m)=2\operatorname{sen}\theta_m$$

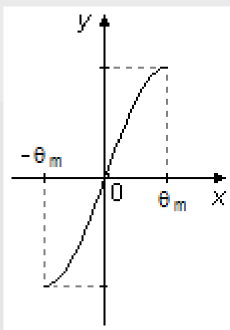
integração de $\displaystyle\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\operatorname{sen}\theta\, d\theta$

**1.º método**

$$\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\operatorname{sen}\theta\, d\theta=-\cos\theta\Big|_{-\theta_m}^{\theta_m}=-[\cos\theta_m-\cos(-\theta_m)]$$

como coseno é uma funcão par, $f(x)=f(-x)$, temos que $\cos(\theta_m)=\cos(-\theta_m)$

$$\int_{-\theta_m}^{\theta_m}\operatorname{sen}\theta\, d\theta=-(\cos\theta_m-\cos\theta_m)=0$$




**2.º método**

O gráfico do seno entre $-\theta_m$ e $0$ possui uma área “negativa” abaixo do eixo-*x* e entre 0 e $\theta_m$ uma área “positiva” acima do eixo-*x* estas duas áreas se cancelam no cálculo da integral, sendo o valor da integral zero. na direção **i**.

***Observação:*** a integral na direção **i**, que é nula, representa o cálculo matemático para a afirmação que se faz usualmente de que as componentes do campo elétrico paralelas ao eixo-*x* ($d\mathbf{E}_P$) se anulam. Apenas as componentes normais ao eixo *x* ($d\mathbf{E}_N$) contribuem para o campo elétrico total (figura 5 abaixo).

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y}\left(-0\,\mathbf{i}+2\operatorname{sen}\theta_m\,\mathbf{j}\right)$$
$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y}2\operatorname{sen}\theta_m\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{E}=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}\operatorname{sen}\theta_m\,\mathbf{j}\qquad\text{(XII)}$$

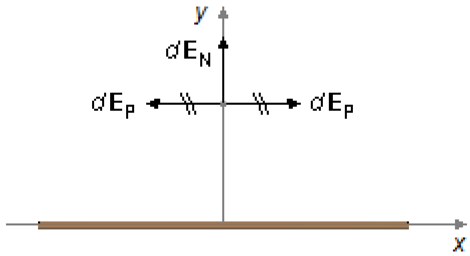


figura 5

A densidade linear de carga do fio todo é dada por

$$\lambda=\frac{Q}{L}\qquad\text{(XIII)}$$

substituindo a expressão (XIII) em (XII), obtemos

$$\mathbf{E}=\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 yL}\operatorname{sen}\theta_m\,\mathbf{j}\qquad\text{(XIV)}$$

O seno de $\theta_m$ pode ser obtido da figura 6

$$\operatorname{sen}\theta_m=\frac{\frac{L}{2}}{r}$$
$$\operatorname{sen}\theta_m=\frac{L}{2r}\qquad\text{(XV)}$$

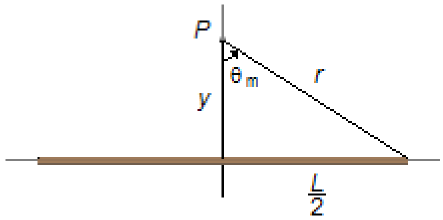


figura 6

A hipotenusa *r* é dada pelo *Teorema de Pitágoras*

$$r^2=y^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2$$
$$r^2=y^2+\frac{L^2}{4}$$
$$r=\sqrt{y^2+\frac{L^2}{4}}$$
$$r=\sqrt{\frac{4y^2+L^2}{4}}$$
$$r=\frac{\sqrt{4y^2+L^2}}{2}\qquad\text{(XVI)}$$

substituindo a expressão (XVI) em (XV), temos

$$\operatorname{sen}\theta_m=\frac{L}{2\frac{\sqrt{4y^2+L^2}}{2}}$$
$$\operatorname{sen}\theta_m=\frac{L}{\sqrt{4y^2+L^2}}\qquad\text{(XVII)}$$

substituindo a expressão (XVII) em (XIV), obtemos finalmente

$$\mathbf{E}=\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 yL}\frac{L}{\sqrt{4y^2+L^2}}\,\mathbf{j}$$

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 y}\frac{1}{\sqrt{4y^2+L^2}}\,\mathbf{j}}$$