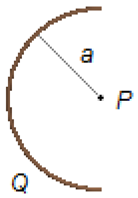
Um pedaço de fio condutor é dobrado na forma de uma semicircunferência de raio *a*, este fio é carregado com uma carga elétrica *Q* distribuída uniformemente. No ponto *P* do centro da semicircunferência esta distribuição de cargas gera um campo elétrico de módulo E_1.

Sendo o fio substituído por uma carga pontual de mesmo valor *Q* e a uma distância *a*, igual ao raio da semicircunferência, do ponto *P* ela gera neste ponto um campo elétrico de módulo E_2.

Calcule a razão E_1/E_2, entre os módulos do campos elétricos gerados pela semicircunferência carrega e pela carga pontual.



Dados do problema

- raio do arco: *a*;
- carga do arco: *Q;*
- carga pontual: *Q*.

Esquema do problema

O vetor posição **r** vai de um elemento de carga dq do arco até o ponto *P* onde se deseja calcular o campo elétrico, o vetor $\mathbf{r}_q$ localiza o elemento de carga em relação à origem do referencial e o vetor $\mathbf{r}_p$ localiza o ponto *P*, como neste caso o ponto *P* está na origem o vetor $\mathbf{r}_p$ é nulo ($\mathbf{r}_p = 0$), assim pela figura 2-A

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_p-\mathbf{r}_q$$

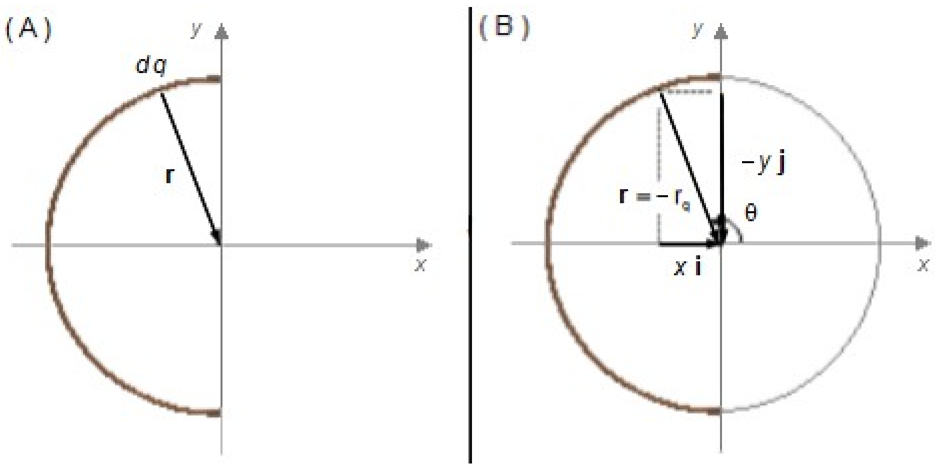


figura 1

Pela geometria do problema devemos escolher coordenadas polares (figura 1-B), vetor $\mathbf{r}_q$, é escrito como $\mathbf{r}_q=x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}$, então o vetor posição será

$$\begin{aligned}\mathbf{r}&=0-(x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j})\\ \mathbf{r}&=-x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}\end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Da expressão (I) o módulo do vetor posição **r** será

$$r^2=x^2+y^2$$

$$r=\left(x^{2}+y^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{II}$$

onde *x e y*, em coordenadas polares, são dados por

$$x=a\cos\theta\quad,\quad y=a\,\operatorname{sen}\theta \tag{III}$$

Solução

O vetor campo elétrico do arco é dado por

$$\mathbf{E}_{1}=\frac{1}{4\pi\epsilon_{0}}\int\frac{dq}{r^{2}}\frac{\mathbf{r}}{r}$$
$$\mathbf{E}_{1}=\frac{1}{4\pi\epsilon_{0}}\int\frac{dq}{r^{3}}\mathbf{r} \tag{IV}$$

Da expressão da densidade linear de carga (λ) obtemos o elemento de carga dq

$$\lambda=\frac{dq}{ds}$$
$$dq=\lambda\,ds \tag{V}$$

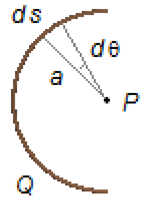


figura 2

onde ds é um elemento de arco de ângulo $d\theta$ do aro (figura 2), assim

$$ds=a\,d\theta \tag{VI}$$

substituindo (VI) em (V)

$$dq=\lambda\,a\,d\theta \tag{VII}$$

substituindo (I), (II) e (VII) em (IV), temos

$$\mathbf{E}_{1}=\frac{1}{4\pi\epsilon_{0}}\int\frac{\lambda\,a\,d\theta}{\left[\left(x^{2}+y^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{3}}\left(-x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}\right)$$
$$\mathbf{E}_{1}=\frac{1}{4\pi\epsilon_{0}}\int\frac{\lambda\,a\,d\theta}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}\right) \tag{VIII}$$

substituindo as expressões de (III) em (VIII), vem

$$\mathbf{E}_{1}=\frac{1}{4\pi\epsilon_{0}}\int\frac{\lambda\,a\,d\theta}{\left[\left(a\cos\theta\right)^{2}+\left(a\,\operatorname{sen}\theta\right)^{2}\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-a\cos\theta\,\mathbf{i}+a\,\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}\right)$$
$$\mathbf{E}_{1}=\frac{1}{4\pi\epsilon_{0}}\int\frac{\lambda\,a\,d\theta}{\left[a^{2}\cos^{2}\theta+a^{2}\operatorname{sen}^{2}\theta\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-a\cos\theta\,\mathbf{i}+a\,\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}\right)$$
$$\mathbf{E}_{1}=\frac{1}{4\pi\epsilon_{0}}\int\frac{\lambda\,a\,d\theta}{\left[a^{2}\underbrace{\left(\cos^{2}\theta+\operatorname{sen}^{2}\theta\right)}_{1}\right]^{\frac{3}{2}}}a\left(-\cos\theta\,\mathbf{i}+\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}\right)$$
$$\mathbf{E}_{1}=\frac{1}{4\pi\epsilon_{0}}\int\frac{\lambda\,a^{2}\,d\theta}{\left(a^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-\cos\theta\,\mathbf{i}+\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}\right)$$
$$\mathbf{E}_{1}=\frac{1}{4\pi\epsilon_{0}}\int\frac{\lambda\,a^{2}\,d\theta}{a^{3}}\left(-\cos\theta\,\mathbf{i}+\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}\right)$$
$$\mathbf{E}_{1}=\frac{1}{4\pi\epsilon_{0}}\int\frac{\lambda\,d\theta}{a}\left(-\cos\theta\,\mathbf{i}+\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}\right)$$

Como a densidade de carga λ e o raio *a* são constantes, a integral depende apenas de θ, eles podem "sair" da integral, e sendo a integral da soma igual a soma das integrais podemos escrever

$$\mathbf{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{a}\left(-\int\cos\theta\,d\theta\,\mathbf{i}+a\int\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,\mathbf{j}\right)$$

Os limites de integração serão $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ (meia volta no círculo trigonométrico – figura 3)

$$\mathbf{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{a}\left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\,\mathbf{i}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,\mathbf{j}\right)$$

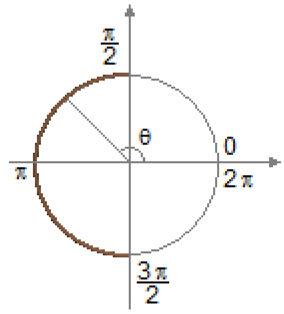


figura 3

integração de $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\operatorname{sen}\theta\,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=-1-1=-2$$

integração de $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\operatorname{sen}\theta\,d\theta=-\cos\theta\,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=-\left(\cos\frac{3\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\right)=-(\,0-0\,)=0$$

$$\mathbf{E}_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{a}\left[-(-2)\,\mathbf{i}+0\,\mathbf{j}\right]$$

$$\mathbf{E}_1=\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{a}\,\mathbf{i} \qquad \text{(IX)}$$

A carga total do arco é *Q*, o comprimento de uma semicircunferência é metade do componente de uma circunferência $C=\frac{2\pi a}{2}=\pi a$, assim a densidade linear de carga pode ser escrita

$$\lambda=\frac{Q}{\pi a} \qquad \text{(X)}$$

substituindo (X) em (IX), temos

$$\mathbf{E}_1=\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a\pi a}\,\mathbf{i}$$
$$\mathbf{E}_1=\frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}\,\mathbf{i}$$

e o módulo do campo elétrico será

$$E_1=\frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2} \tag{XI}$$

O vetor campo elétrico gerado por uma carga pontual é

$$\mathbf{E}_2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

e seu módulo será

$$E_2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

para uma distância $r=\;a$, obtemos

$$E_2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a^2} \tag{XII}$$

A razão entre as intensidades dos campos elétricos gerados pela distribuição de cargas numa semicircunferência e pela carga pontual é obtida dividindo-se a expressão (XI) por (XII), assim

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\dfrac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}}{\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{a^2}}$$
$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}\frac{4\pi\epsilon_0}{1}\frac{a^2}{Q}$$

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2}=\frac{2}{\pi}}$$

Observação: este resultado significa que o campo gerado pela carga pontual é $E_2=\dfrac{\pi}{2}E_1$ mais intenso (mais forte) que o campo gerado pela distribuição de da mesma carga Q numa semicircunferência.