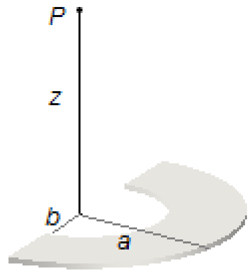
Uma chapa semi-circular possui raio externo *a* e raio interno *b*, conforme figura ao lado. Ela está carregada com uma carga total Q distribuída de forma não uniforme diretamente proporcional ao ângulo central θ do semi-círculo de tal forma que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Calcule o vetor campo elétrico num ponto *P* sobre o eixo perpendicular ao plano do semi-círculo que passa pelo centro de curvatura a uma distância *z* do seu centro.



Dados do problema

- raio externo do semi-circulo: *a*;
- raio interno do semi-circulo: *b*;
- carga do semi-circulo: *Q*;
- distância ao ponto onde se quer o campo elétrico: *z*.

Esquema do problema

A densidade superficial de carga do semi-círculo é diretamente proporcional à posição angular da carga (figura 1)

$$\sigma(\theta) = \alpha\,\theta \tag{I}$$

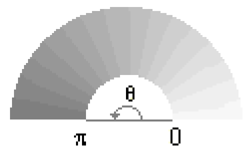


figura 1

onde α é uma constante que torna a expressão dimensionalmente consistente.

O vetor posição **r** vai de um elemento de carga $d\,q$ do disco até o ponto *P* onde se deseja calcular o campo elétrico, o vetor $\mathbf{r}_{\text{q}}$ localiza o elemento de carga em relação à origem do referencial e o vetor $\mathbf{r}_{\text{p}}$ localiza o ponto *P*, assim pela figura 1-A

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{p}} - \mathbf{r}_{\text{q}}$$

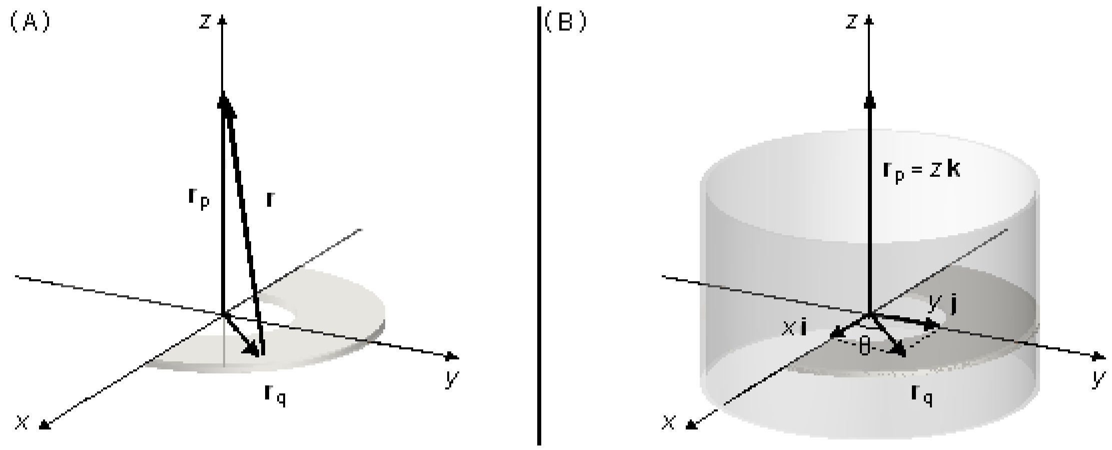


figura 2

Pela geometria do problema devemos escolher coordenadas cilíndricas (figura 1-B), o vetor $\mathbf{r}_{\text{q}}$, que está no plano *xy*, é escrito como $\mathbf{r}_{\text{q}} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ e o vetor $\mathbf{r}_{\text{p}}$ só possui componente na direção **k**, $\mathbf{r}_{\text{p}} = z\,\mathbf{k}$, então o vetor posição será

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= z\,\mathbf{k} - (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) \\ \mathbf{r} &= -x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \end{aligned} \tag{II}$$

Da expressão (I) o módulo do vetor posição **r** será

$$r^2=x^2+y^2+z^2$$
$$r=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(III)}$$

onde x, y e z, em coordenadas cilíndricas, são dados por

$$x=r_{\text{q}}\cos\theta \quad , \quad y=r_{\text{q}}\operatorname{sen}\theta \quad , \quad z=z \qquad \text{(IV)}$$

Solução

O vetor campo elétrico é dado por

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^3}\mathbf{r} \qquad \text{(V)}$$

Da expressão da densidade superficial de carga (σ) obtemos o elemento de carga dq

$$\sigma(\theta)=\frac{dq}{dA}$$
$$dq=\sigma(\theta)\,dA \qquad \text{(VI)}$$

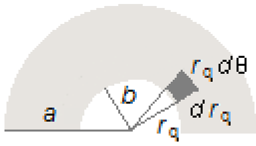


figura 3

onde dA é um elemento de área de ângulo $d\theta$ do disco (figura 3), assim

$$dA=r_{\text{q}}\,dr_{\text{q}}\,d\theta \qquad \text{(VII)}$$

substituindo (I) e (VII) em (VI)

$$dq=\alpha\,\theta\,r_{\text{q}}\,dr_{\text{q}}\,d\theta \qquad \text{(VIII)}$$

substituindo (II), (III) e (VIII) em (V), e como a integração é feita sobre a superfície do semi-círculo (depende de duas variáveis r_{q} e θ) temos uma integral dupla

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\alpha\,\theta\,r_{\text{q}}\,dr_{\text{q}}\,d\theta}{\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^3}\left(-x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\alpha\,\theta\,r_{\text{q}}\,dr_{\text{q}}\,d\theta}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right) \qquad \text{(IX)}$$

substituindo as expressões de (III) em (IX), vem

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\alpha\,\theta\,r_{\text{q}}\,dr_{\text{q}}\,d\theta}{\left[\left(r_{\text{q}}\cos\theta\right)^2+\left(r_{\text{q}}\operatorname{sen}\theta\right)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-r_{\text{q}}\cos\theta\,\mathbf{i}-r_{\text{q}}\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\alpha\,\theta\,r_{\text{q}}\,dr_{\text{q}}\,d\theta}{\left[r_{\text{q}}^2\cos^2\theta+r_{\text{q}}^2\operatorname{sen}^2\theta+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-r_{\text{q}}\cos\theta\,\mathbf{i}-r_{\text{q}}\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\alpha\,\theta\,r_{\text{q}}\,dr_{\text{q}}\,d\theta}{\left[r_{\text{q}}^2\underbrace{\left(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta\right)}_{1}+z^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(-r_{\text{q}}\cos\theta\,\mathbf{i}-r_{\text{q}}\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\frac{\alpha\,\theta\,r_{\text{q}}\,dr_{\text{q}}\,d\theta}{\left(r_{\text{q}}^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-r_{\text{q}}\cos\theta\,\mathbf{i}-r_{\text{q}}\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}\right)$$

Como α é constante e a integral não depende de *z*, depende de r_q e θ, eles podem "sair" da integral, e sendo a integral da soma igual a soma das integrais podemos escrever

$$\mathbf{E}=\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0}\left(-\int\int\frac{r_q^2\,\theta\cos\theta\,d r_q\,d\theta}{\left(r_q^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathbf{i}-\int\int\frac{r_q^2\,\theta\operatorname{sen}\theta\,d r_q\,d\theta}{\left(r_q^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathbf{j}+z\int\int\frac{r_q\,\theta\,d r_q\,d\theta}{\left(r_q^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathbf{k}\right)$$

Os limites de integração serão de *b* a *a* em $d r_q$ (ao longo do raio do disco) e de 0 e π em $d\theta$ (meia volta), e como não existem termos "cruzados" em r_q e θ as integrais podem ser separadas

$$\mathbf{E}=\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0}\left(-\int_b^a\frac{r_q^2\,d r_q}{\left(r_q^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\pi\theta\cos\theta\,d\theta\,\mathbf{i}-\int_b^a\frac{r_q^2\,d r_q}{\left(r_q^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\pi\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,\mathbf{j}+\right.$$
$$\left.+z\int_b^a\frac{r_q\,d r_q}{\left(r_q^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\pi\theta\,d\theta\,\mathbf{k}\right)$$

colocando a integral $\displaystyle\int_b^a\frac{r_q^2\,d r_q}{\left(r_q^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ em evidência re-escrevemos

$$\mathbf{E}=\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0}\int_b^a\frac{r_q^2\,d r_q}{\left(r_q^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-\int_0^\pi\theta\cos\theta\,d\theta\,\mathbf{i}-\int_0^\pi\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,\mathbf{j}+z\int_0^\pi\theta\,d\theta\,\mathbf{k}\right)$$

Integração de $\displaystyle\int_b^a\frac{r_q\,d r_q}{\left(r_q^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

fazendo a mudança de variável

$$u=r_q^2+z^2$$
$$d u=2r_q\,d r_q\Rightarrow d r_q=\frac{d u}{2r_q}$$

para $r_q=b$
temos $u=b^2+z^2$

para $r_q=a$
temos $u=a^2+z^2$

$$\int_{b^2+z^2}^{a^2+z^2}\frac{r_q}{u^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{2r_q}\Rightarrow\frac{1}{2}\int_{b^2+z^2}^{a^2+z^2}\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\,d u\Rightarrow\frac{1}{2}\left.\frac{u^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right|_{b^2+z^2}^{a^2+z^2}\Rightarrow\frac{1}{2}\left.\frac{u^{\frac{-3+2}{2}}}{\frac{-3+2}{2}}\right|_{b^2+z^2}^{a^2+z^2}\Rightarrow\frac{1}{2}\left.\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right|_{b^2+z^2}^{a^2+z^2}\Rightarrow-u^{-\frac{1}{2}}\Big|_{b^2+z^2}^{a^2+z^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow-\left.\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\right|_{b^2+z^2}^{a^2+z^2}\Rightarrow-\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}\right)\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

integração de $\displaystyle\int_0^\pi\theta\cos\theta\,d\theta$

Usando *Integração por Partes* $\int u v' = u v - \int u' v$, escolhemos

$$u = \theta \qquad v' = \cos\theta$$
$$u' = 1 \qquad v = \operatorname{sen}\theta$$

$$\int_0^\pi \theta \cos\theta \, d\theta = \theta \operatorname{sen}\theta \,\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$\int_0^\pi \theta \cos\theta \, d\theta = \theta \operatorname{sen}\theta \,\Big|_0^\pi - \left(-\cos\theta \,\Big|_0^\pi \right)$$

$$\int_0^\pi \theta \cos\theta \, d\theta = \theta \operatorname{sen}\theta \,\Big|_0^\pi + \cos\theta \,\Big|_0^\pi$$

$$\int_0^\pi \theta \cos\theta \, d\theta = \left(\pi . \operatorname{sen}\pi - 0 . \operatorname{sen}0 \right) + \left(\cos\pi - \cos 0 \right)$$

$$\int_0^\pi \theta \cos\theta \, d\theta = \left(\pi . 0 - 0 . 0 \right) + \left(-1 - 1 \right)$$

$$\int_0^\pi \theta \cos\theta \, d\theta = -2$$

integração de $\int_0^\pi \theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta$

Usando *Integração por Partes* $\int u v' = u v - \int u' v$, escolhemos

$$u = \theta \qquad v' = \operatorname{sen}\theta$$
$$u' = 1 \qquad v = -\cos\theta$$

$$\int_0^\pi \theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -\theta \cos\theta \,\Big|_0^\pi - \int_0^\pi -\cos\theta \, d\theta$$

$$\int_0^\pi \theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -\theta \cos\theta \,\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos\theta \, d\theta$$

$$\int_0^\pi \theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -\theta \cos\theta \,\Big|_0^\pi + \operatorname{sen}\theta \,\Big|_0^\pi$$

$$\int_0^\pi \theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -\left(\pi . \cos\pi - 0 . \cos 0 \right) + \left(\operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}0 \right)$$

$$\int_0^\pi \theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -\left[\pi . (-1) - 0 . 1 \right] + \left(0 - 0 \right)$$

$$\int_0^\pi \theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \pi$$

integração de $\displaystyle\int_0^{\pi} d\theta$

$$\int_0^{\pi} d\theta=\theta\,\Big|_0^{\pi}=\pi-0=\pi$$

$$\mathbf{E}=\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\left[-(-2)\,\mathbf{i}-\pi\,\mathbf{j}+z\pi\,\mathbf{k}\right]$$

$$\boxed{\mathbf{E}=\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\left(2\,\mathbf{i}-\pi\,\mathbf{j}+z\pi\,\mathbf{k}\right)}$$

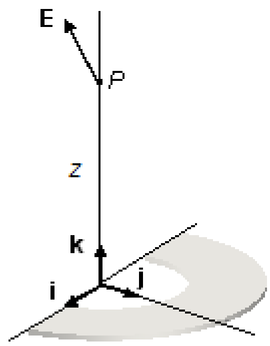


figura 4