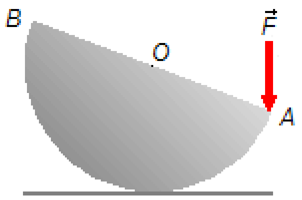
Uma semisfera de peso *P* repousa sobre um plano horizontal liso. Na extremidade *A* do diâmetro *AB* é aplicada uma força *F* que obriga a semisfera a se inclinar de maneira que *AB* passa formar com o plano horizontal um ângulo α. Calcular esse ângulo α sabendo que o centro de gravidade da semisfera encontra-se a uma distância do centro *O* igual a 3/8 do raio.



Dados do problema

- peso da semisfera: P;
- força aplicada: F;
- raio da semisfera: $d_{OA}=R$;
- posição do centro de gravidade: $d_{CG}=\dfrac{3}{8}R$.

Esquema do problema

O problema nos diz que o centro de gravidade da semisfera está localizado a $\dfrac{3}{8}$ de unidade a partir do ponto *O* (figura 1-A).

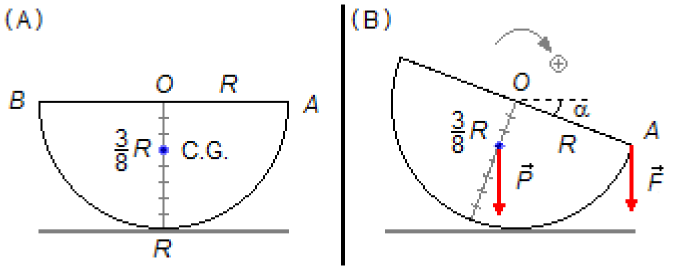


figura 1

Consideramos toda a força peso ($\vec{P}$) concentrada nesse ponto e a força ($\vec{F}$) aplicada no ponto *A* a uma distância igual ao raio da semisfera (figura 1-B). Quando a força $\vec{F}$ é aplicada a semisfera se inclina até se equilibrar numa posição em que o diâmetro *AB* está inclinado de uma ângulo α em relação à horizontal.

Adotamos o ponto *O* como origem do sistema de referência, vamos adotar o sentido horário como sendo positivo.

Solução

O momento de uma força é dado por

$$M_{F}=F\,d \tag{I}$$

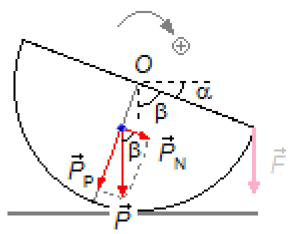


figura 2

"Esquecendo" a força $\vec{F}$ e considerando apenas a força peso $\vec{P}$, esta pode ser decomposta em duas, uma componente paralela ao raio que passa pelo centro de gravidade ($\vec{P}_P$) e outra perpendicular ou normal ($\vec{P}_N$). O ângulo entre a horizontal e o segmento *AB* é dado como sendo α, o ângulo entre o segmento *AB* e a vertical que passa por *O* chamamos de β, então a soma de α e β deve ser 90º (são ângulos complementares), então β deve ser $\alpha+\beta=90^{\circ}\Rightarrow\beta=90^{\circ}-\alpha$. Como a componente normal da força peso está na mesma direção do segmento *AB* e a força peso é vertical, o ângulo entre elas também é β (são ângulos correspondes). Apenas a componente normal contribui para que a semisfera gire em torno do ponto *O*, como esta componente faz girar no sentido contrário da orientação escolhida o momento desta força será negativo, pela expressão (I), temos

$$M_{P_N}=-P_N d_{CG} \qquad \text{(II)}$$

da figura 2 temos que

$$P_N=P\cos\beta$$
$$P_N=P\cos(90^\circ-\alpha)$$

lembrando da *Trigonometria* que $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$, obtemos

$$P_N=P[\cos 90^\circ\cos\alpha+\operatorname{sen}90^\circ\operatorname{sen}\alpha]$$
$$P_N=P[0.\cos\alpha+1.\operatorname{sen}\alpha]$$
$$P_N=P\operatorname{sen}\alpha \qquad \text{(III)}$$

substituindo a expressão (III) em (II), obtemos

$$M_{P_N}=-P\operatorname{sen}\alpha\, d_{CG} \qquad \text{(IV)}$$

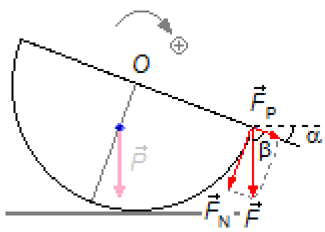


figura 3

"Esquecendo" a força peso $\vec{P}$ e considerando apenas a força $\vec{F}$, esta pode ser decomposta em duas, uma componente paralela ao raio que passa pelo centro *O* ($\vec{F}_P$) e outra perpendicular ou normal ($\vec{F}_N$). O ângulo entre a horizontal e o segmento *AB* é dado como sendo α, o ângulo entre o segmento *AB* e a vertical que passa por *A* chamamos de β, então a soma de α e β deve ser 90º (são ângulos complementares), então β deve ser $\alpha+\beta=90^\circ\Rightarrow\beta=90^\circ-\alpha$. Apenas a componente normal contribui para que a semisfera gire em torno do ponto *O*, como esta componente faz girar no mesmo sentido da orientação escolhida o momento desta força será positivo, pela expressão (I), temos

$$M_{F_N}=F_N\, d_{OA} \qquad \text{(V)}$$

da figura 3 temos que

$$F_N=F\operatorname{sen}\beta$$
$$F_N=F\operatorname{sen}(90^\circ-\alpha)$$

lembrando da *Trigonometria* que $\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}a\cos b-\operatorname{sen}b\cos a$, obtemos

$$F_N=F[\operatorname{sen}90^\circ\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cos 90^\circ]$$
$$F_N=F[1.\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha.0]$$
$$F_N=F\cos\alpha \qquad \text{(VI)}$$

substituindo a expressão (VI) em (V), obtemos

$$M_{F_N}=F\cos\alpha\, d_{OA} \qquad \text{(VII)}$$

Usando a condição de que a somatória dos momentos é nula

$$\sum M=0 \qquad \text{(VIII)}$$

substituindo as expressões (IV) e (VII) na condição (VIII), temos

$$
\begin{gathered}
M_{P_N}+M_{F_N}=0\\
-P\ \operatorname{sen}\alpha\ d_{OG}+F\ \cos\alpha\ d_{OA}=0\\
-P\ \operatorname{sen}\alpha\ \frac{3}{8}\ R+F\ \cos\alpha\ R=0\\
F\ R\ \cos\alpha=\frac{3}{8}\ R\ P\operatorname{sen}\alpha
\end{gathered}
$$

simplificando o raio *R* da semisfera de ambos os lados da igualdade, obtemos

$$
\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{8}{3}\frac{F}{P}
$$

lembrando da *Trigonometria* que $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

$$
\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{3}\frac{F}{P}
$$

$$
\boxed{\alpha=\operatorname{arc\ tg}\frac{8}{3}\frac{F}{P}}
$$