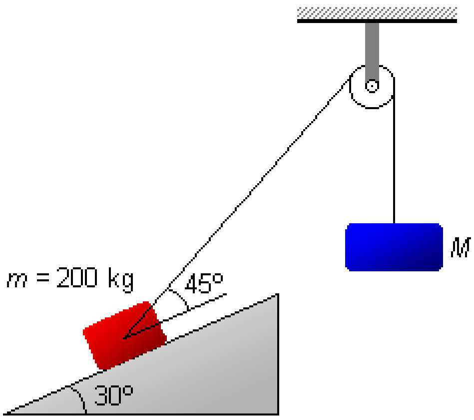
Um corpo de massa 200 kg é mantido em equilíbrio sobre um plano inclinado de 30º em relação à horizontal mediante um fio que passa por uma polia fixa e que sustenta na outra extremidade um corpo de massa *M*. O fio forma com a reta de maior declive do plano um ângulo de 45º. Determinar:
a) A massa *M*;
b) A força exercida pelo corpo contra o plano.



Dados do problema

- massa do corpo no plano inclinado: m = 200 kg;
- ângulo do plano inclinado com a horizontal: 30º;
- ângulo da corda com o plano inclinado: 45º.

Esquema do problema

Em primeiro lugar vamos isolar os corpos e pesquisar as forças que agem sobre cada um e como o sistema está em equilíbrio devemos ter que a somatória de todas as forças seja igual a zero

$$\sum F=0 \qquad \text{(I)}$$

Corpo de massa *M*

- T: tensão na corda;
- P_{M} peso do corpo suspenso.

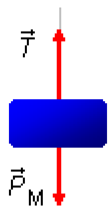


figura 1

Como só existem forças atuando no corpo na direção vertical (figura 1) pela condição de equilíbrio (I) temos, em módulo

$$T-P_{\mathrm{M}}=0 \qquad \text{(II)}$$

Corpo de massa 200 kg

- T: tensão na corda, tem o mesmo valor em módulo que a tensão que age sobre o bloco anterior;
- P_{I}: peso do corpo no plano inclinado;
- N: reação normal do plano sobre o bloco.

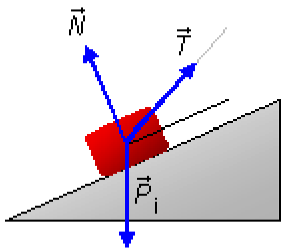


figura 2

Vamos analisar as forças em duas direções, na direção paralela ao plano inclinado (chamada de x) e na direção perpendicular a este (chamada de y).

Devemos achar o ângulo que a força peso forma com as direções perpendicular (y) e paralela (x) ao plano inclinado (figura 3).

O ângulo $Q\hat{A}M$ é dado no problema como sendo 30º, o segmento $\overrightarrow{QM}$ (direção onde está a força peso) é perpendicular ao segmento $\overline{AC}$, como a soma dos ângulos internos de um triângulo deve valer 180º então o ângulo $A\hat{Q}M$ deve ser

$$
\begin{aligned}
A\hat{Q}M+30^{\circ}+90^{\circ} &= 180^{\circ}\\
A\hat{Q}M &= 180^{\circ}-30^{\circ}-90^{\circ}\\
A\hat{Q}M &= 60^{\circ}
\end{aligned}
$$

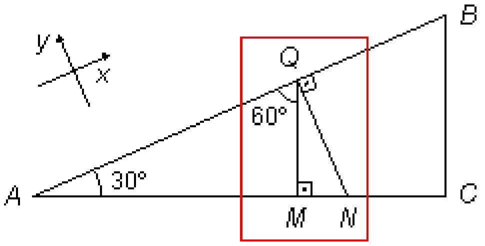


figura 3

Para determinarmos o valor do ângulo □, figura 4, vamos ampliar a região em vermelho da figura 3. Já sabemos que o ângulo $A\hat{Q}M$ vale 60º e o segmento $\overrightarrow{QN}$ é perpendicular ao segmento $\overrightarrow{AB}$ (forma um ângulo de 90º). então a soma destes ângulos com o ângulo □ procurado deve ser 180º, assim

$$
\begin{aligned}
60^{\circ}+90^{\circ}+\alpha &= 180^{\circ}\\
\alpha &= 180^{\circ}-60^{\circ}-90^{\circ}\\
\alpha &= 30^{\circ}
\end{aligned}
$$

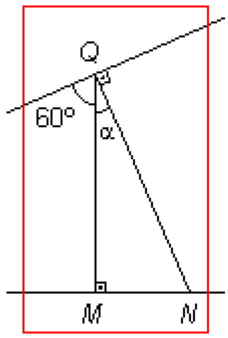


figura 4

Desenhando as forças num sistema de eixos coordenados como mostra a figura 5 podemos obter suas componentes, em módulo, ao longo das direções *x* e *y*.

componentes ao longo do eixo *x*

- $N_{x}=0$
- $T_{x}=T\,\cos 45^{\circ}$
- $P_{ix}=-P_{i}\cos 60^{\circ}$

Aplicando a condição de equilíbrio dada em (I) a estas equações temos

$$
\begin{aligned}
N_{x}+T\,\cos 45^{\circ}-P_{i}\cos 60^{\circ} &= 0\\
T\,\cos 45^{\circ}-P_{i}\cos 60^{\circ} &= 0 \qquad \text{(III)}
\end{aligned}
$$

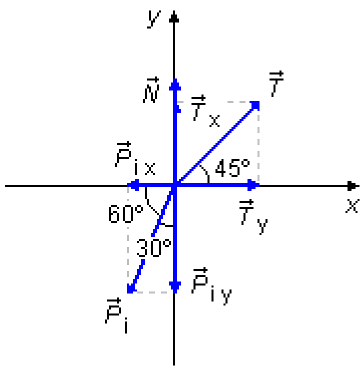


figura 5

componentes ao longo do eixo *y*

- $N_{y}=N$
- $T_{y}=T\,\text{sen}\,45^{\circ}$
- $P_{iy}=-P_{i}\,\text{sen}\,60^{\circ}$

Da condição (I) escrevemos

$$N+T\,\text{sen}\,45^{\circ}-P_{i}\,\text{sen}\,60^{\circ}=0 \qquad \text{(IV)}$$

Solução

a) Sendo a força peso dada por

$$P=mg$$

e lembrando da *Trigonometria* que $\cos 45^{\circ}=\text{sen}\,45^{\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60^{\circ}=\dfrac{1}{2}$ e $\text{sen}\,60^{\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ as equações (II), (III) e (IV) formam um sistema de três equações a três incógnitas (*N*, *T* e *M*)

$$\left|\begin{array}{ll} T-M\,g=0 & \text{(V)}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}T-\dfrac{1}{2}m\,g=0 & \text{(VI)}\\ N+\dfrac{\sqrt{2}}{2}T-\dfrac{\sqrt{3}}{2}m\,g=0 & \text{(VII)}\end{array}\right.$$

isolando o valor da tensão na equação (V), temos

$$T=M\,g \tag{VIII}$$

e substituindo em (VI)

$$\frac{\sqrt{2}}{2}M\,g-\frac{1}{2}m\,g=0$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}M\,g=\frac{1}{2}m\,g$$

simplificando o valor de g e o 2 no denominador

$$\sqrt{2}M=m$$
$$M=\frac{m}{\sqrt{2}}$$

substituindo o valor de m dado no problema e sendo $\sqrt{2}\approx 1,4142$, obtemos

$$M=\frac{200}{1,4142}$$

$$\boxed{M=141,4\ \ \text{kg}}$$

b) A força exercida sobre o plano (F_{p}) será dada pela componente y do bloco sobre o plano inclinado

$$F_{\text{p}}=P_{\text{iy}}=-P_{\text{i}}\operatorname{sen}60^{\circ}$$

adotando-se o valor de 10 m/s^2 para a aceleração da gravidade na Terra (já que o problema não dá este valor), temos

$$F_{\text{p}}=-200\,.\,10\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

sendo $\sqrt{3}\approx 1,7321$, temos

$$\boxed{F_{\text{p}}=-1732\ \ \text{N}}$$