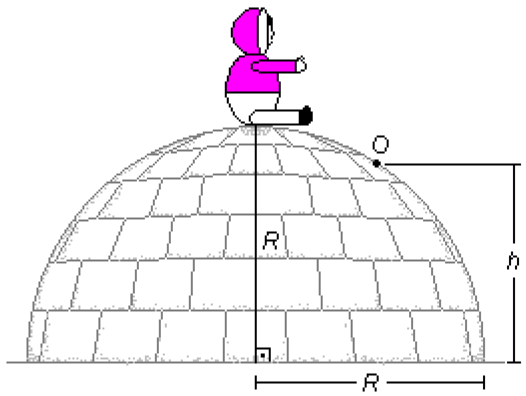
Um garoto está sentado sobre um iglu de forma hemisférica, conforme ilustra a figura. Se ele começar a deslizar a partir do repouso, desprezando atritos, a que altura *h* relativa à horizontal estará o ponto *O* em que ele perderá contato coma calota hemisférica de raio *R*?



Esquema do problema

Quando o garoto está no topo do iglu as forças que agem nele são a força peso ($\vec{P}$) e a normal ($\vec{N}$), reação do iglu ao peso do garoto. A condição para que o garoto perca contato com a calota e que a normal seja igual a zero, ele descola do iglu e não há mais reação do iglu ao peso do garoto. Neste momento a única força agindo nele será o seu peso que pode ser decomposto em duas componentes, uma radial que forma um ângulo θ com a força peso na vertical, que pode ser escrita como $P\cos\theta$, e outra componente tangencial, que será $P\,\text{sen}\,\theta$, estes elementos podem ser vistos na figura 1.

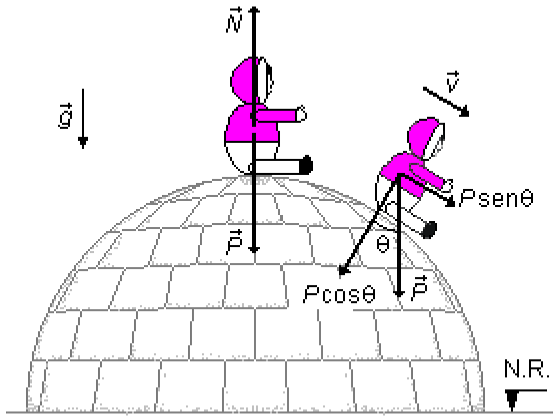


figura 1

Dado do problema

- raio do iglu: *R*.

Solução

Pelo *Princípio da Conservação da Energia Mecânica* a energia do garoto no topo do iglu deve ser igual a energia no ponto O onde ele perde contato com o hemisfério. Tomando-se o chão como *Nível de Referência* (*N.R.*), a partir do qual a energia potencial será medida temos que no topo do iglu o garoto está em repouso, sua velocidade é igual a zero, portanto ele só possui energia potencial proporcional a *R*. No ponto O ele está deslizando com uma velocidade *v*, possui energia cinética somada a energia potencial proporcional a altura *h* do chão. Assim podemos escrever

$$E_{\mathrm{M}}^{\mathrm{topo}}=E_{\mathrm{M}}^{\mathrm{O}}$$
$$E_{\mathrm{P}}^{\mathrm{topo}}=E_{\mathrm{C}}^{\mathrm{P}}$$
$$m\,g\,R=\frac{m\,v^{2}}{2}+m\,g\,h$$

simplificando a massa *m* de ambos os lados da igualdade

$$g\,R=\frac{v^{2}}{2}+g\,h \qquad \text{(I)}$$

Para a determinação de *v* vemos pela figura 2 que o ângulo formado entre o raio *R* do iglu e a altura *h* em é θ, logo

$$\cos\theta=\frac{h}{R} \qquad \text{(II)}$$

Aplicando a *2.ª Lei de Newton*, temos

$$\vec{F}_{CP}=m\vec{a}_{CP}$$

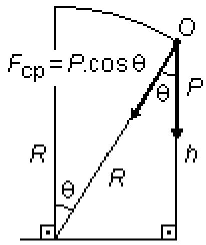


figura 2

a componente do peso na direção radial ($P\cos\theta$) é a força centrípeta a que o garoto está submetido e a aceleração centrípeta é dada por $a_{CP}=\frac{v^2}{R}$, assim

$$P\cos\theta=m\frac{v^2}{R}$$

sendo a força peso dada por $P=mg$

$$mg\cos\theta=m\frac{v^2}{R}$$

simplificando a massa *m* de ambos os lados da igualdade, obtemos

$$g\cos\theta=\frac{v^2}{R} \qquad \text{(III)}$$

substituindo (II) em (III)

$$g\frac{h}{R}=\frac{v^2}{R}$$

simplificando o raio *R* no denominador de ambos os lados da igualdade, vem

$$v^2=gh \qquad \text{(IV)}$$

substituindo (IV) em (I) obtemos finalmente

$$gR=\frac{gh}{2}+gh$$

simplificando a aceleração da gravidade *g* de ambos os lados da igualdade

$$R=\frac{h}{2}+h$$

$$R=\frac{h+2h}{2}$$

$$R=\frac{3h}{2}$$

$$\boxed{h=\frac{2}{3}R}$$