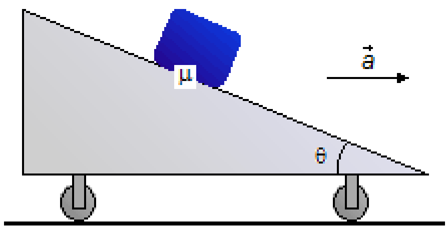
Um carrinho se desloca sobre uma superfície reta e horizontal. No carrinho há um plano inclinado, que forma um ângulo θ com a horizontal, sobre o plano coloca-se um corpo que possui coeficiente de atrito μ, entre o corpo e o plano. Determinar a aceleração do carrinho para que o corpo esteja na iminência de subir ao longo do plano. Adote *g* para a aceleração da gravidade.



Dados do problema

- ângulo de inclinação do plano: θ;
- coeficiente de atrito entre o corpo e o plano: μ;
- aceleração da gravidade: *g*.

Esquema do problema

Adotamos um sistema de referência *xy* com eixo-*x* paralelo ao plano inclinado e sentido da descendente do plano.

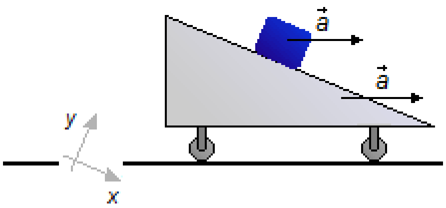


figura 1

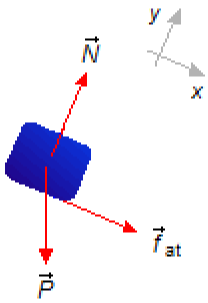


figura 2

Supõe-se o solo (Terra) sem aceleração, referencial inercial. O carrinho possui aceleração *a* em relação ao solo, referencial não-inercial. As *Leis de Newton* valem para referenciais inerciais, portanto para que o corpo permaneça em repouso sobre o carrinho ele deve ter, em relação ao solo, a mesma aceleração *a* do carrinho (figura 1).

Isolando o corpo e pesquisando as forças que agem nele, temos a força peso (*P*), como o corpo está na iminência de subir temos a força de atrito entre o plano e o corpo (f_{at}) no sentido da descendente do plano se opondo a este movimento e a reação normal da superfície (*N*), figura 2.

Solução

A força peso pode ser decomposta em duas, uma componente paralela ao eixo-*x* (P_x) e a outra normal ou perpendicular (P_y). Da figura 3-A vemos que a força peso é perpendicular ao plano horizontal, forma um ângulo de 90º, o ângulo entre o plano inclinado e o plano horizontal é dado como θ, como os ângulos internos de um triângulo devem somar 180º o ângulo entre a força peso e a componente paralela deve ser $\alpha+\theta+90^{\circ}=180^{\circ}\Rightarrow\alpha=180^{\circ}-\theta-90^{\circ}\Rightarrow\alpha=90^{\circ}-\theta$. As componentes do peso nas direções *x* e *y* são perpendiculares entre si, no triângulo à esquerda temos que o ângulo entre as força peso e a componente do peso na direção *y* é $90^{\circ}-\alpha\Rightarrow 90^{\circ}-(90^{\circ}-\theta)\Rightarrow 90^{\circ}-90^{\circ}+\theta\Rightarrow\theta$.

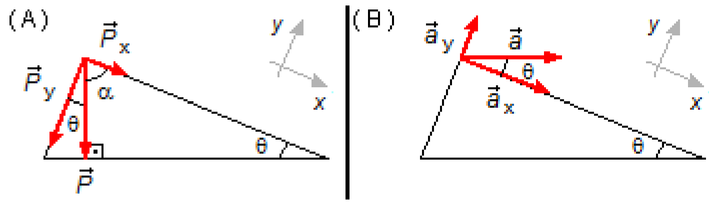


figura 3

A aceleração do carrinho também deve ser decomposta nas direções *x* e *y*. O ângulo entre a aceleração e a componente da aceleração na direção do plano inclinado, onde está a componente na direção *x* (a_x) é θ, é o mesmo ângulo do plano inclinado, são ângulos alternos internos (figura 3-B).

Desenhamos os vetores num sistema de eixos coordenados, figura 4.

As componentes da aceleração serão dadas por

$$a_x = a\cos\theta \qquad \text{(I)}$$
$$a_y = a\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{(II)}$$

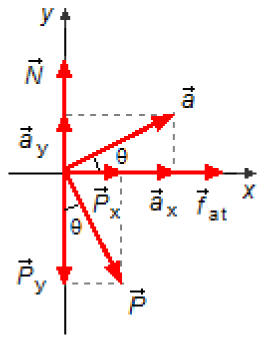


figura 4

e as componentes do peso dadas por

$$P_x = P\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{(III)}$$
$$P_y = P\cos\theta \qquad \text{(IV)}$$

com o módulo da força peso dada por

$$P = mg \qquad \text{(V)}$$

e o módulo da força de atrito

$$f_{at} = \mu N \qquad \text{(VI)}$$

Aplicando a *2.ª Lei de Newton*

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Na direção *x* temos a componente P_x do peso e a força de atrito f_{at}

$$P_x + f_{at} = m a_x \qquad \text{(VII)}$$

substituindo (I), (III) e (VI) em (VII) e o valor da força peso dada por (V), temos

$$mg\,\text{sen}\,\theta + \mu N = m a\cos\theta \qquad \text{(VIII)}$$

Na direção *y* temos a componente P_y do peso e a reação normal *N*

$$N - P_y = m a_y \qquad \text{(IX)}$$

substituindo (II) e (IV) em (IX) e o valor da força peso dada por (V), temos

$$N - mg\cos\theta = m a\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{(X)}$$

Isolando o valor da reação normal *N* em (X), obtemos

$$N = m a\,\text{sen}\,\theta + mg\cos\theta \qquad \text{(XI)}$$

substituindo (XI) em (VIII)

$$
\begin{gathered}
m g \operatorname{sen}\theta+\mu\left(m a \operatorname{sen}\theta+m g \cos\theta\right)=m a \cos\theta \\
m g \operatorname{sen}\theta+\mu m a \operatorname{sen}\theta+\mu m g \cos\theta=m a \cos\theta
\end{gathered}
$$

simplificando a massa *m* de ambos os lados da igualdade

$$
\begin{gathered}
g \operatorname{sen}\theta+\mu a \operatorname{sen}\theta+\mu g \cos\theta=a \cos\theta \\
g \operatorname{sen}\theta+\mu g \cos\theta=a \cos\theta-\mu a \operatorname{sen}\theta
\end{gathered}
$$

colocando *g* em evidência do lado esquerdo da igualdade e *a* do lado direito, finalmente

$$
g\left(\operatorname{sen}\theta+\mu \cos\theta\right)=a\left(\cos\theta-\mu \operatorname{sen}\theta\right)
$$

$$
\boxed{a=g\left(\frac{\operatorname{sen}\theta+\mu \cos\theta}{\cos\theta-\mu \operatorname{sen}\theta}\right)}
$$