Um projétil é disparado com velocidade inicial igual a v_0 e formando um ângulo θ_0 com a horizontal, sabendo-se que os pontos de disparo e o alvo estão sobre o mesmo plano horizontal e desprezando-se a resistência do ar, determine:
a) A altura máxima que o projétil atinge;
b) O tempo necessário para atingir a altura máxima;
c) O tempo de duração do movimento total;
d) O alcance máximo horizontal do projétil;
e) A equação da trajetória do movimento oblíquo;
f) O ângulo de tiro que proporciona o máximo alcance;
g) Mostre que tiros com ângulos complementares têm os mesmo alcance;
h) A velocidade num ponto qualquer da trajetória;
i) As componentes da aceleração num ponto qualquer da trajetória.

Dados do problema

- velocidade inicial: v_0;
- ângulo de tiro com a horizontal: θ_0.

Esquema do problema

Adota-se um sistema de referência com o eixo *Ox* apontando para a direita e *Oy* para cima, a aceleração da gravidade está apontada para baixo e o ponto de disparo está na origem do referencial (x_0, y_0) = (0, 0), conforme a figura 1.

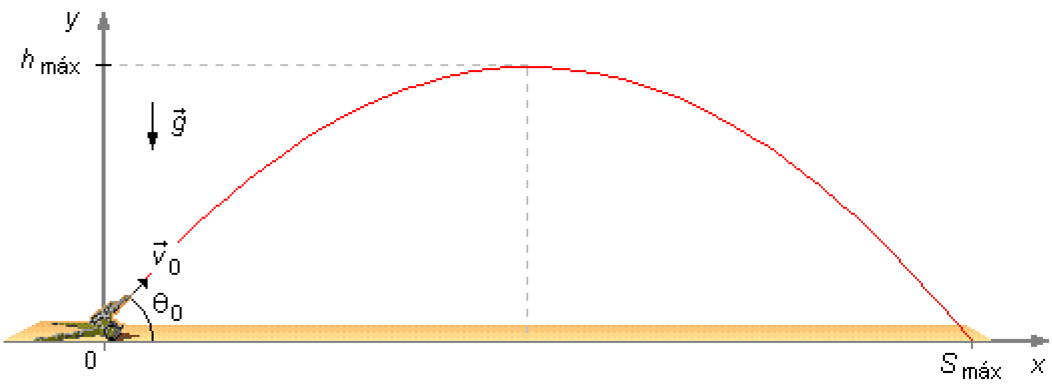

figura 1

O movimento pode ser decomposto ao longo dos eixos *x* e *y*, a velocidade inicial v_0 será decomposta ao longo destas direções como mostra a figura 2. Sendo as componentes da velocidade dadas, em módulo, por

$$v_{0x}=v_0\cos\theta_0 \qquad \text{(I)}$$

$$v_{0y}=v_0\,\text{sen}\,\theta_0 \qquad \text{(II)}$$

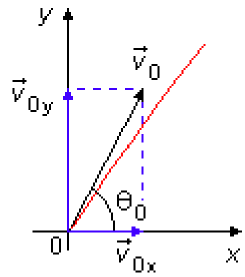

figura 2

Da decomposição do movimento vemos que na direção *x* não há nenhuma aceleração agindo sobre o projétil, então ele está em *Movimento Retilíneo Uniforme* (*M.R.U.*) e seu movimento é regido pela equação

$$S_x=S_{0x}+v_x.t$$

como no movimento uniforme $v_x=v_{0x}$ é constante podemos substituir v_x pelo valor de (I) e $S_{0x}=0$

$$S_x=0+\left(v_0\cos\theta_0\right)t$$

$$S_x=\left(v_0\cos\theta_0\right)t \tag{III}$$

Na direção y o projétil está sob a ação da aceleração da gravidade, portanto está em queda livre que é regido pelas equações

$$S_y=S_{0y}+v_{0y}\,t-g\,\frac{t^2}{2}$$
$$v_y=v_{0y}-g\,t$$
$$v_y^2=v_{0y}^2-2g\,\Delta S_y$$

substituindo v_{0y} pelo valor dado em (II) e $S_{0y}=0$

$$S_y=0+\left(v_0\,\text{sen}\theta_0\right)t-g\,\frac{t^2}{2}$$
$$S_y=\left(v_0\,\text{sen}\theta_0\right)t-g\,\frac{t^2}{2} \tag{IV}$$
$$v_y=\left(v_0\,\text{sen}\theta_0\right)-g\,t \tag{V}$$
$$v_y^2=\left(v_0\,\text{sen}\theta_0\right)^2-2g\,\Delta S_y \tag{VI}$$

com $-g$ constante (o sinal de negativo indica que a aceleração da gravidade esta contra a orientação do referencial).

Assim pela figura 3 vemos que no movimento ao longo da direção x temos que para intervalos de tempos iguais temos intervalos de espaços iguais ($\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=\Delta x_4=\Delta x_5=\Delta x_6$) Na direção y temos que durante a subida para intervalos de tempos iguais temos intervalos de espaços menores, pois a partícula está sendo freada pela ação da gravidade ($\Delta y_1>\Delta y_2>\Delta y_3$) até que a velocidade v_y zera e então a gravidade começa a puxar a partícula de volta ao solo com velocidade acelerada, assim para intervalos de tempos iguais temos intervalos de espaços cada vez maiores ($\Delta y_4<\Delta y_5<\Delta y_6$)

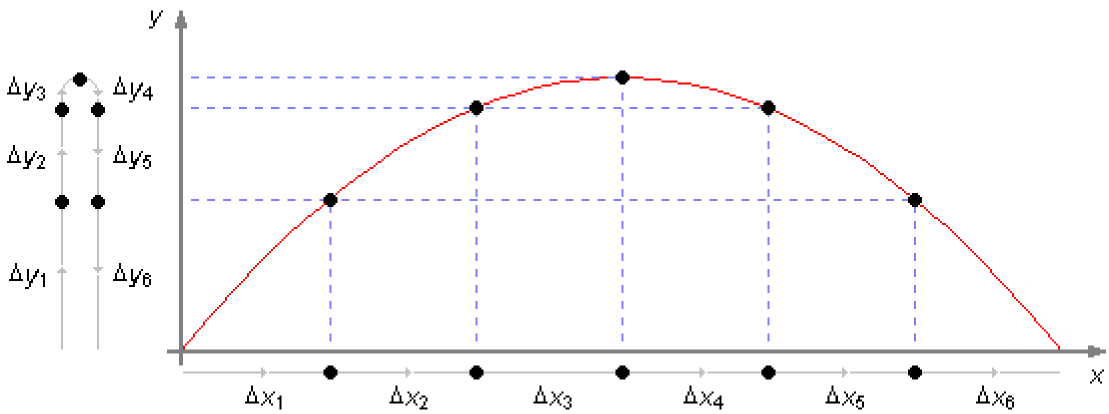

figura 3

Solução

a) Para encontrarmos a altura máxima ($h_{\text{máx}}$) atingida pelo projétil basta analisarmos o movimento ao longo da direção y. Quando o projétil atinge a altura máxima sua velocidade v_y se anula ($v_y=0$), assim usando a equação (VI) temos

$$0=\left(v_0\,\text{sen}\theta_0\right)^2-2g\,h_{\text{máx}}$$
$$v_0^2\,\text{sen}^2\theta_0-2g\,h_{\text{máx}}=0$$

$$\boxed{h_{máx}=\frac{v_0^2\operatorname{sen}^2\theta_0}{2g}}$$

b) O tempo de subida (t_S) para atingir a altura máxima será obtido de (V) com a condição de que a velocidade se anula na máxima altura atingida pelo projétil ($v_y=0$), então temos que

$$0=v_0\operatorname{sen}\theta_0-g\,t_S$$
$$g\,t_S=v_0\operatorname{sen}\theta_0$$

$$\boxed{t_S=\frac{v_0\operatorname{sen}\theta_0}{g}}$$

c) O tempo total (t_T) do movimento será a soma dos tempos de subida (t_S) e de descida (t_D), sendo que no movimento de lançamento vertical e queda livre os tempos de subida e de descida são iguais, temos a condição

$$t_T=t_S+t_D$$

com $t_S=t_D$

$$t_T=2t_S$$

usando o resultado para o tempo de subida obtido no item anterior,temos

$$\boxed{t_T=2\frac{v_0\operatorname{sen}\theta_0}{g}}$$

d) O tempo calculado acima, para o projétil subir e descer, é também o tempo que ele levará para ir da origem até o ponto $S_{máx}$ ao longo do eixo x, então substituindo a resposta do item anterior na expressão (III), obtemos

$$S_{máx}=\left(v_0\cos\theta_0\right)2\frac{v_0\operatorname{sen}\theta_0}{g}$$
$$S_{máx}=\frac{v_0^2}{g}\,2\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0$$

mas, da trigonometria, temos que

$$\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$
$$\operatorname{sen}(2\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

e substituindo esta relação na expressão acima, ficaremos com o alcance máximo na seguinte forma

$$\boxed{S_{máx}=\frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}\left(2\theta_0\right)}$$

e) Para obter a forma da trajetória indicada na figura 1 temos que ter y com função de x, ou $y=f(x)$, usando as equações (III) e (IV) para os movimentos em x e y e lembrando que $S_{0x}=S_{0y}=0$, temos o sistema

$$\left|\begin{array}{l} S_x=\left(v_0\cos\theta_0\right)t \\ S_y=\left(v_0\operatorname{sen}\theta_0\right)t-g\,\dfrac{t^2}{2} \end{array}\right.$$

isolando o tempo na primeira equação temos

$$t=\frac{S_x}{v_0\cos\theta_0}$$

substituindo este valor na segunda equação obtemos

$$S_y=v_0\operatorname{sen}\theta_0\left(\frac{S_x}{v_0\cos\theta_0}\right)-\frac{g}{2}\left(\frac{S_x}{v_0\cos\theta_0}\right)^2$$

$$\boxed{S_y=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}S_x^2+\frac{\operatorname{sen}\theta_0}{\cos\theta_0}S_x}$$

Fazendo a associação mostrada abaixo com uma *Equação do 2.º grau* do tipo $y=ax^2+bx+c$

$$\begin{array}{cccccc} S_y= & -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0} & S_x^2+ & \dfrac{\operatorname{sen}\theta_0}{\cos\theta_0} & S_x & +0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y= & a & x^2+ & b & x & +c \end{array}$$

vemos que obtivemos uma função do tipo $S_y=f(S_x)$ com o coeficiente a < 0 o que indica que a nossa trajetória é uma parábola de “boca” para baixo.

f) A resposta obtida no item (d) para o alcance máximo ($S_{máx}$) depende do ângulo inicial de lançamento, da trigonometria sabemos que a função seno varia de –1 a 1, então o valor máximo do alcance ocorre quando

$$\operatorname{sen}\left(2\theta_0\right)=1$$
$$2\theta_0=\operatorname{arc\,sen}1$$

o seno cujo o arco vale 1 é igual a 90º, assim

$$2\theta_0=90°$$
$$\theta_0=\frac{90°}{2}$$
$$\boxed{\theta_0=45°}$$

g) Da trigonometria temos que ângulos complementares são aqueles que somam $90°$ ou $\dfrac{\pi}{2}$, sejam, então, dois ângulos θ_1 e θ_2 complementares

$$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2} \qquad \text{(VII)}$$

Usando o resultado do item (d) que nos dá o alcance máximo escrevemos os alcances $S_{\text{máx}1}$ e $S_{\text{máx}2}$ para os ângulos acima

$$S_{\text{máx}1}=\frac{v_0^2}{g}\,\text{sen}\left(2\theta_1\right) \qquad \text{(VIII)}$$

$$S_{\text{máx}2}=\frac{v_0^2}{g}\,\text{sen}\left(2\theta_2\right) \qquad \text{(IX)}$$

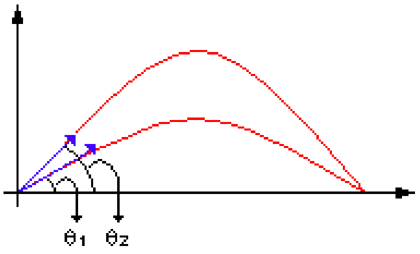

figura 4

Escrevendo de (VII) θ_2 em função de θ_1

$$\theta_2=\frac{\pi}{2}-\theta_1$$

e substituindo em (IX), temos

$$S_{\text{máx}2}=\frac{v_0^2}{g}\,\text{sen}\left[2\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)\right]$$

$$S_{\text{máx}2}=\frac{v_0^2}{g}\,\text{sen}\left(\pi-2\theta_1\right)$$

o seno nesta equação pode ser desenvolvido segundo a relação que nos dá o seno da diferença, $\text{sen}\left(\alpha-\beta\right)=\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta-\text{sen}\,\beta\,\cos\alpha$

$$S_{\text{máx}2}=\frac{v_0^2}{g}\left(\text{sen}\,\pi\,\cos 2\theta_1-\text{sen}\,2\theta_1\,\cos\pi\right)$$

sendo $\text{sen}\,\pi=0$, $\cos\pi=-1$, temos

$$S_{\text{máx}2}=\frac{v_0^2}{g}\left[0.\cos 2\theta_1-\text{sen}\,2\theta_1\,(-1)\right]$$

$$S_{\text{máx}2}=\frac{v_0^2}{g}\,\text{sen}\left(2\theta_1\right) \qquad \text{(X)}$$

portanto comparando as expressões (VIII) e (X)

$$\boxed{S_{\text{máx}1}=S_{\text{máx}2}} \qquad \text{Q.E.D}$$

observação: Q.E.D. é a abreviação da expressão em latim "*quod erat demosntrandum*" que significa "como queríamos demonstrar".

h) Num ponto qualquer da trajetória o vetor velocidade ($\vec{V}$) pode ser decomposto nas suas componentes ao longo dos eixos *x* e *y* ($\vec{V}_x$ e $\vec{V}_y$), como se vê na figura 5-A, abaixo.

O vetor velocidade será então a soma vetorial de suas componentes

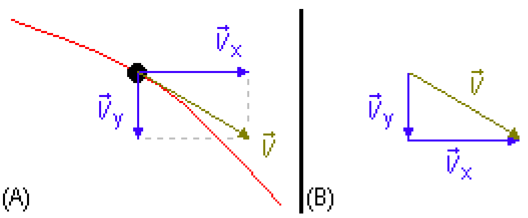

figura 5

$$\vec{V}=\vec{V}_X+\vec{V}_Y$$

Pela figura 5-B vemos que os vetores formam um triângulo retângulo e o módulo da velocidade pode ser calculado aplicando-se o *Teorema de Pitágoras*

$$\left|\vec{V}\right|^2=\left|\vec{V}_X\right|^2+\left|\vec{V}_Y\right|^2 \tag{XI}$$

Escrevendo $\left|\vec{V}\right|=V$, $\left|\vec{V}_x\right|=V_x$ e $\left|\vec{V}_y\right|=V_y$ teremos da equação (I)

$$V_x=v_0\cos\theta_0$$

$$V_x^2=v_0^2\cos^2\theta_0 \tag{XII}$$

e de (V),obteremos

$$V^2=\left(v_0\,\text{sen}\,\theta_0\right)-g\,t$$

$$V_y^2=\left[v_0\,\text{sen}\,\theta_0-g\,t\right]^2$$

$$V_y^2=v_0^2\,\text{sen}^2\,\theta_0-2\,v_0\,\text{sen}\,\theta_0\,g\,t+g^2\,t^2 \tag{XIII}$$

substituindo (XII) e (XIII) em (XI)

$$V^2=v_0^2.\cos^2\theta_0+v_0^2.\text{sen}^2\,\theta_0-2.v_0.\text{sen}\,\theta_0.g.t+g^2.t^2$$

nos dois primeiros termos do lado direito da igualdade vamos colocar v_0^2 em evidência e no terceiro termo colocaremos em evidência $-2.g$

$$V^2=v_0^2\left(\cos^2\theta_0+\text{sen}^2\,\theta_0\right)-2g\left(v_0\,\text{sen}\,\theta_0\,t-g\,\frac{t^2}{2}\right) \tag{XIV}$$

o primeiro termo entre parênteses é, pela trigonometria, $\cos^2\alpha+\text{sen}^2\,\alpha=1$, o segundo termo entre parênteses pode ser obtido da equação (VIII) acima escrita como

$$S_y-S_{0y}=v_0\,\text{sen}\,\theta_0\,t-g\,\frac{t^2}{2}$$

mas $\Delta S_y=S_y-S_{0y}$, finalmente (XIV) pode ser escrito como

$$V^2=v_0^2-2g\,\Delta S_y$$

$$\boxed{V=\sqrt{v_0^2-2g\,\Delta S_y}}$$

i) A aceleração da gravidade ($\vec{g}$) a que o projétil está sujeito em qualquer ponto da trajetória pode ser decomposta na aceleração tangencial ($\vec{g}_t$) e na aceleração normal ($\vec{g}_n$), que é perpendicular à trajetória no ponto considerado (figura 6-A). Da figura 6-C temos;

$$\cos\theta=\frac{g_t}{g}$$

$$g_t=g\cos\theta \tag{XV}$$

$$\text{sen}\,\theta=\frac{g_n}{g}$$

$$g_n=g\,\text{sen}\,\theta \tag{XVI}$$

onde θ é ângulo entre a aceleração da gravidade ($\vec{g}$) e sua componente tangencial ($\vec{g}_t$) num ponto qualquer da trajetória. Mas este ângulo é o mesmo que temos entre a velocidade do projétil ($\vec{V}$)e sua componente ao longo da direção *y*, ($\vec{V}_y$) como se vê na figura 6-B.

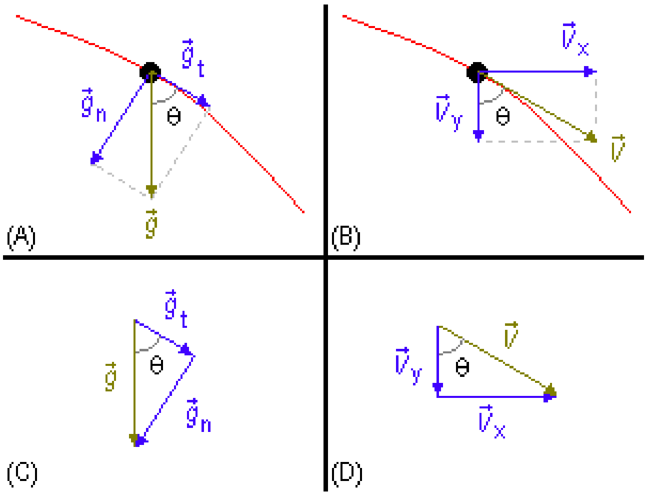

figura 6

Pela figura 6-D vemos que

$$\cos\theta=\frac{V_y}{V}$$

usando o resultado do item anterior para o valor da velocidade, obtemos

$$\cos\theta=\frac{V_y}{\sqrt{v_0^2-2.g.\Delta S_y}}$$

substituindo este valor do co-seno na expressão (XV) a aceleração tangencial será

$$\boxed{g_t=g\,\frac{V_y}{\sqrt{v_0^2-2\,g\,\Delta S_y}}}$$

Da mesma forma a figura 6-D nos dá que

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{V_x}{V}$$

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{V_x}{\sqrt{v_0^2-2.g.\Delta S_y}}$$

e substituindo em (XVI) para a aceleração normal teremos

$$\boxed{g_n=g.\frac{V_x}{\sqrt{v_0^2-2.g.\Delta S_y}}}$$