Do vértice de um ângulo reto partem, com intervalo de tempo igual n segundos, dois motoristas, que se locomovem com velocidades constantes sobre os dois lados. Calcular as velocidades dos dois motoristas, sabendo-se que depois de t segundos, desde a partida do segundo motorista, sua distância é d, e após T segundos; é D.

Dados do problema

- intervalo de tempo entre as partidas dos dois motoristas: n;
- distância entre os móveis após t segundos: d;
- distância entre os móveis após T segundos: D.

Esquema do problema

Adota-se um sistema de referência com 2 eixos perpendiculares, o primeiro móvel parte da origem com velocidade v_1 na direção x, após n segundos o segundo móvel parte da origem com velocidade constante v_2 na direção y. Durante o intervalo de tempo n o móvel 1 terá percorrido uma distância igual a $v_1.n$, esta distância será o espaço inicial do móvel 1 quando do início da contagem do tempo, o móvel 2 que parte da origem terá espaço inicial igual a zero (figura 1).

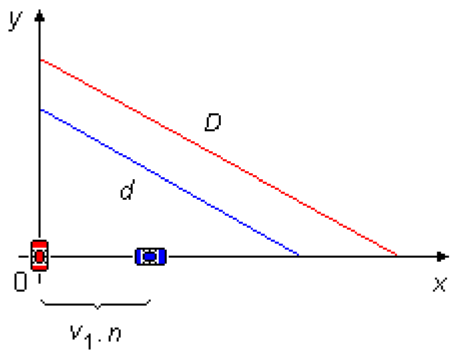

figura 1

Solução

Como os móveis têm velocidades constantes eles descrevem um *Movimento Retilíneo Uniforme* (*M.R.U.*) e a equação que rege este tipo de movimento é

$$S=S_0+v\,\tau$$

observação: *aqui o tempo está representado por τ ao invés do t, geralmente usado, para não confundir com o intervalo de tempo t dado no problema.*

Escrevendo as equações de movimento dos móveis 1 e 2 para os intervalos de tempo t e T, teremos

$$S_1(\tau)=S_{01}+v_1\,\tau$$

$$S_1(t)=v_1\,n+v_1\,t=v_1(n+t) \qquad \text{(I)}$$

$$S_1(T)=v_1\,n+v_1\,T=v_1(n+T) \qquad \text{(II)}$$

$$S_2(\tau)=S_{02}+v_2\,\tau$$

$$S_2(t)=0+v_2\,t=v_2\,t \qquad \text{(III)}$$

$$S_2(T)=0+v_2\,T=v_2\,T \qquad \text{(IV)}$$

Na figura 2 temos $S_1(t)$ o espaço percorrido pelo móvel 1 no intervalo de tempo t e $S_2(t)$ o espaço percorrido pelo móvel 2 neste intervalo de tempo, assim pelo *Teorema de Pitágoras* vale a relação

$$d^2=S_1(t)^2+S_2(t)^2 \qquad \text{(V)}$$

Da mesma forma $S_1(T)$ e $S_2(T)$ são os espaços percorridos pelos móveis 1 e 2, respectivamente, no intervalo de tempo *T*, então temos

$$D^2 = S_1(T)^2 + S_2(T)^2 \qquad \text{(VI)}$$

Substituindo as equações (I), (II), (III) e (IV) nas condições (V) e (VI) obtemos

$$\left|\begin{array}{ll} d^2 = \left[v_1(n+t)\right]^2 + v_2^2\,t^2 & \text{(VII)} \\ D^2 = \left[v_1(n+T)\right]^2 + v_2^2\,T^2 & \text{(VIII)} \end{array}\right.$$

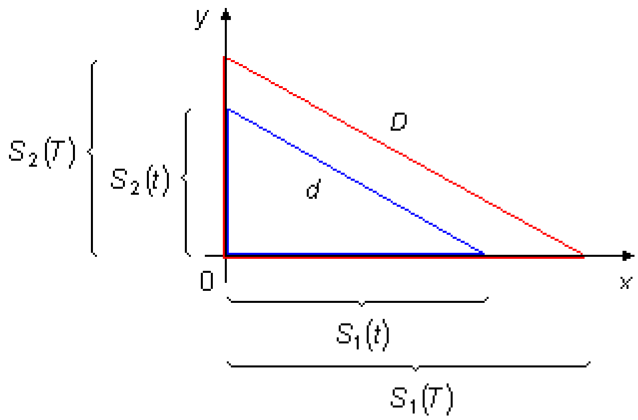

figura 2

este é um sistema de duas equações a duas incógnitas, v_1 e v_2, isolando v_2^2 na equação (VII), temos

$$v_2^2 = \frac{d^2 - \left[v_1(n+t)\right]^2}{t^2} \qquad \text{(IX)}$$

substituindo este valor em (VIII), obtemos

$$D^2 = \left[v_1(n+T)\right]^2 + \left\{\frac{d^2 - \left[v_1(n+t)\right]^2}{t^2}\right\}T^2$$

multiplicando esta expressão por t^2, ficamos com

$$D^2t^2 = \left[v_1(n+T)\right]^2t^2 + \left\{d^2 - \left[v_1(n+t)\right]^2\right\}T^2$$

$$D^2t^2 = \left[v_1(n+T)\right]^2t^2 + d^2T^2 - \left[v_1(n+t)\right]^2T^2$$

$$D^2t^2 - d^2T^2 = v_1^2(n+T)^2t^2 - v_1^2(n+t)^2T^2$$

colocando v_1^2 em evidência na expressão do lado direito

$$D^2t^2 - d^2T^2 = v_1^2\left[(n+T)^2t^2 - (n+t)^2T^2\right]$$

Os termos $(n+T)^2$ e $(n+t)^2$ são *Produtos Notáveis* da forma $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, desenvolvendo estes termos podemos reescrever

$$D^2t^2 - d^2T^2 = v_1^2\left[\left(n^2 + 2nT + T^2\right)t^2 - \left(n^2 + 2nt + t^2\right)T^2\right]$$

$$D^2t^2 - d^2T^2 = v_1^2\left[n^2t^2 + 2nTt^2 + T^2t^2 - n^2T^2 - 2ntT^2 - t^2T^2\right]$$

$$D^2t^2 - d^2T^2 = v_1^2\left[n^2t^2 + 2nTt^2 - n^2T^2 - 2ntT^2\right]$$

colocando n^2 e $2ntT$ em evidência no termo entre colchetes, temos

$$D^2t^2 - d^2T^2 = v_1^2\left[n^2\left(t^2 - T^2\right) + 2nTt(t-T)\right]$$

o termo $\left(t^2-T^2\right)$ é um *Produto Notável* da forma $\left(a^2-b^2\right)=(a-b).(a+b)$, então

$$D^2t^2-d^2T^2=v_1^2\left[n^2(t-T)(t+T)+2nTt(t-T)\right]$$

colocando o termo $n.(t-T)$ em evidência dentro do colchete, escrevemos

$$D^2t^2-d^2T^2=v_1^2\{n(t-T)[n(t+T)+2tT]\}$$

$$\boxed{v_1=\pm\sqrt{\frac{D^2t^2-d^2T^2}{n(t-T)[n(t+T)+2tT]}}}$$

Substituindo este valor em v_1^2 na equação (IX) e colocando o termo $1/t^2$ em evidência teremos o valor de v_2

$$v_2^2=\frac{d^2-\left[v_1(n+t)\right]^2}{t^2}$$

$$v_2^2=\frac{1}{t^2}\left[d^2-v_1^2(n+t)^2\right]$$

$$v_2^2=\frac{1}{t^2}\left\{d^2-\frac{D^2t^2-d^2T^2}{n(t-T)[n(t+T)+2tT]}(n+t)^2\right\}$$

O termo $n.(t-T).[n.(t+T)+2tT]$ ë o *Mínimo Múltiplo Comum* (*M.M.C*) dos termos entre chaves, assim ficamos com

$$v_2^2=\frac{1}{t^2}\left\{\frac{d^2[n(t-T)[n(t+T)+2tT]]-\left(D^2t^2-d^2T^2\right)(n+t)^2}{n(t-T)[n(t+T)+2tT]}\right\}$$

$$v_2^2=\frac{1}{t^2}\left\{\frac{d^2\left[(n+T)^2t^2-(n+t)T^2\right]-\left(D^2t^2-d^2T^2\right)(n+t)^2}{n(t-T)[n(t+T)+2tT]}\right\}$$

$$v_2^2=\frac{1}{t^2}\left\{\frac{d^2(n+T)^2t^2-d^2(n+t)T^2-D^2t^2(n+t)^2+d^2T^2(n+t)^2}{n(t-T)[n(t+T)+2tT]}\right\}$$

$$v_2^2=\frac{1}{t^2}\left\{\frac{d^2(n+T)^2t^2-D^2t^2(n+t)^2}{n(t-T)[n(t+T)+2tT]}\right\}$$

$$v_2^2=\frac{d^2(n+T)^2-D^2(n+t)^2}{n(t-T)[n(t+T)+2tT]}$$

$$\boxed{v_2=\pm\sqrt{\frac{d^2(n+T)^2-D^2(n+t)^2}{n(t-T)[n(t+T)+2tT]}}}$$