

Um trem parte de uma estação A, onde está em repouso, com aceleração constante a , em certo momento o maquinista imprime ao trem uma desaceleração igual a b , o trem para ao chegar a uma estação B. Sendo L a distância entre as estações, determine o tempo percorrido na viagem.

Esquema do problema

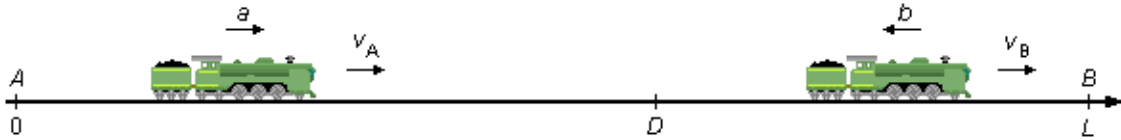


figura 1

Adota-se um sistema de referência orientado para a direita com origem na estação A, sendo D o ponto da trajetória em que o maquinista começa a frear o trem e L o espaço onde se encontra a estação B (figura 1). As grandezas com índice A referem-se a primeira parte do trajeto e com índice B a segunda parte

Dados do problema

- aceleração do trem: $\alpha_A = a$;
- desaceleração do trem: $\alpha_B = b$;
- distância entre as estações: L .

Solução

O trem apresenta aceleração ($\alpha > 0$ na primeira parte do movimento e $\alpha < 0$ na segunda parte), ele está em *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.V.)*, a equação que rege este tipo de movimento é do tipo

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2 \quad (I)$$

e para a velocidade temos

$$v = v_0 + \alpha t \quad (II)$$

Sendo $S_{0A} = 0$ o espaço de onde o trem parte e começa a acelerar, $S_A = D$ o espaço final onde o trem para de acelerar e começa a desacelerar, $v_{0A} = 0$ a velocidade inicial do trem (parte do repouso), $\alpha_A = a$ a aceleração do trem e t_A o tempo que o trem permanece em movimento acelerado, substituindo esses dados na equação (I) acima obtemos

$$\begin{aligned} S_A &= S_{0A} + v_{0A} t_A + \frac{\alpha_A}{2} t_A^2 \\ D &= 0 + 0 t_A + \frac{a}{2} t_A^2 \\ D &= \frac{a}{2} t_A^2 \end{aligned} \quad (III)$$

para a velocidade temos que

$$v_A = v_{0A} + \alpha_A t_A$$

onde v_A é a velocidade final do trem após ter acelerado por um tempo t_A , então

$$v_A = 0 + \alpha_A t_A$$

$$v_A = at_A \quad (IV)$$

Para a segunda parte da viagem temos $S_{0B} = D$ o espaço onde o trem começa a desacelerar, $S_B = L$ o espaço final onde o trem para, $v_{0B} = v_A$ a velocidade inicial em que o trem se encontra ao começar a frear, sendo esta igual a velocidade final da primeira parte do movimento, $\alpha_B = b$ a desaceleração do trem e t_B o tempo que o trem desacelera até parar, levando estes valores à equação (I) temos

$$S_B = S_{0B} + v_{0B} t_B + \frac{\alpha_B}{2} t_B^2$$

$$L = D + at_A t_B - \frac{b}{2} t_B^2 \quad (V)$$

a velocidade será dada por

$$v_B = v_{0B} + \alpha_B t_B$$

como o trem para ao chegar a estação B a velocidade final será $v_B = 0$, a velocidade inicial $v_{0B} = v_A$ será dada pela expressão (IV) acima e t_B é o tempo que o trem desacelera até parar, podemos escrever

$$0 = at_A - bt_B$$

$$at_A = bt_B \quad (VI)$$

A partir da expressão (VI) podemos isolar o tempo em que o trem permanece desacelerando, assim

$$t_B = \frac{a}{b} t_A \quad (VII)$$

Substituindo na equação (V) as expressões (III) e (VII), temos

$$L = \frac{a}{2} t_A^2 + at_A \frac{a}{b} t_A - \frac{b}{2} \left(\frac{a}{b} t_A \right)^2$$

$$L = \frac{a}{2} t_A^2 + \frac{a^2}{b} t_A^2 - \frac{b}{2} \frac{a^2}{b} t_A^2$$

$$L = \frac{a}{2} t_A^2 + \frac{a^2}{b} t_A^2 - \frac{a^2}{2b} t_A^2$$

$$L = \frac{a}{2} t_A^2 + \frac{a^2}{b} t_A^2$$

colocando t_A^2 em evidência

$$L = t_A^2 \left(\frac{a}{2} + \frac{a^2}{b} \right)$$

o *Mínimo Múltiplo Comum* (M.M.C.) do termo entre parênteses é igual a $2b$ assim

$$L = t_A^2 \left(\frac{ab + a^2}{2b} \right)$$

isolando t_A temos o tempo em que o trem percorre a primeira parte do trajeto

$$t_A^2 = \frac{2Lb}{a(a+b)}$$

$$t_A = \sqrt{\frac{2Lb}{a(a+b)}} = \left[\frac{2Lb}{a(a+b)} \right]^{1/2} \quad (\text{VIII})$$

Da mesma forma podemos isolar t_A na equação (VII)

$$t_A = \frac{b}{a} t_B \quad (\text{IX})$$

Substituindo em (III) o valor dado por (V) novamente, obtemos

$$L = \frac{a}{2} t_A^2 + a t_A t_B - \frac{b}{2} t_B^2$$

agora utilizando (IX) para o valor de t_A , escrevemos

$$L = \frac{a}{2} \left(\frac{b}{a} t_B \right)^2 + a \frac{b}{a} t_B t_B - \frac{b}{2} t_B^2$$

$$L = \frac{a}{2} \frac{b^2}{a^2} t_B^2 + a \frac{b}{a} t_B^2 - \frac{b}{2} t_B^2$$

$$L = \frac{b^2}{2a^2} t_B^2 + b t_B^2 - \frac{b}{2} t_B^2$$

$$L = \frac{b^2}{2a^2} t_B^2 + \frac{b}{2} t_B^2$$

colocando t_B^2 em evidência

$$L = t_B^2 \left(\frac{b^2}{2a} + \frac{b}{2} \right)$$

no termo entre parênteses o *Mínimo Múltiplo Comum* (M.M.C.) é $2a$ e escrevemos

$$L = t_B^2 \left(\frac{b^2 + ab}{2a} \right)$$

o tempo percorrido até o trem parar na estação B será

$$t_B^2 = \frac{2La}{b(b+a)}$$

$$t_B = \sqrt{\frac{2La}{b(b+a)}} = \left[\frac{2La}{b(b+a)} \right]^{1/2} \quad (\text{X})$$

O tempo total da viagem (t) será dado pela soma das expressões (VIII) e (X)

$$t = t_A + t_B$$

$$t = \left[\frac{2Lb}{a(a+b)} \right]^{1/2} + \left[\frac{2La}{b(a+b)} \right]^{1/2}$$

colocando o termo $\left[\frac{2L}{a+b} \right]^{1/2}$ em evidência, temos

$$t = \left[\frac{2L}{a+b} \right]^{1/2} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{1/2} + \left(\frac{a}{b} \right)^{1/2} \right]$$

$$t = \left[\frac{2L}{a+b} \right]^{1/2} \left[\frac{b^{1/2}}{a^{1/2}} + \frac{a^{1/2}}{b^{1/2}} \right]$$

o *Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.)* do termo no segundo par de colchetes é $a^{1/2} b^{1/2}$, então obtemos

$$t = \left[\frac{2L}{a+b} \right]^{1/2} \left[\frac{b+a}{a^{1/2} b^{1/2}} \right]$$

colocando o segundo termo entre colchetes para "dentro" da raiz, fica

$$t = \left[\frac{2L}{(a+b)} \frac{(b+a)^2}{ab} \right]^{1/2}$$

simplificando o termo $(a+b)$ a resposta final é dada por

$$t = \left[\frac{2L(b+a)}{ab} \right]^{1/2}$$