Um corpo é abandonado no vácuo de uma altura H. Calcular H sabendo que o corpo percorre os últimos h metros em T segundos. A aceleração da gravidade é g.

Esquema do problema

Adotando-se um sistema de referência orientado para cima, o espaço inicial será a altura H de onde objeto é solto, o espaço final será a origem (zero), h é a altura em que o corpo está ao se contar o tempo final da queda, a aceleração da gravidade e a velocidade terão sinal negativo, pois estão contra a orientação da trajetória.

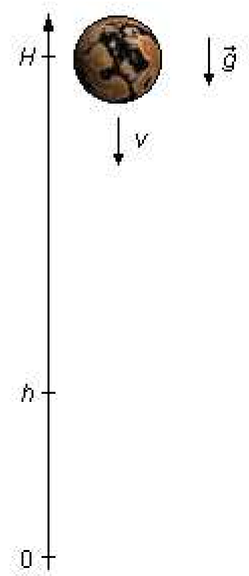

figura 1

Dados do problema

- altura da queda: H;
- espaço inicial da parte final da trajetória: $S_0 = h$;
- espaço final: $S = 0$;
- intervalo de tempo para percorrer o final da trajetória: T;
- aceleração da gravidade: $-g$.

Solução

O corpo cai com a aceleração da gravidade, ele está em *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.V.)*, escrevendo a equação horária deste movimento para a parte final da queda

$$S = S_0 + v_0\, t - \frac{g}{2} t^2$$

$$0 = S + v_{0h}\, T - \frac{g}{2} T^2 \qquad \text{(I)}$$

onde v_{0h} indica a velocidade inicial não a partir do repouso, mas a partir do ponto em que o corpo passa pelo ponto de altura h.

Para o cálculo de v_{0h} vemos pela figura 1 que esta é a velocidade que o corpo possui ao cair de H até h ($\Delta S = h - H$) a partir do repouso ($v_0 = 0$), como não se conhece o intervalo de tempo desta queda podemos utilizar a *Equação de Torricelli* para obter v_{0h}

$$v^2 = v_0^2 - 2\, g\, \Delta S$$

$$v_{0h}^2 = 0^2 - 2\, g \left(h - H \right)$$

$$v_{0h} = \sqrt{-2\, g \left(h - H \right)} \qquad \text{(II)}$$

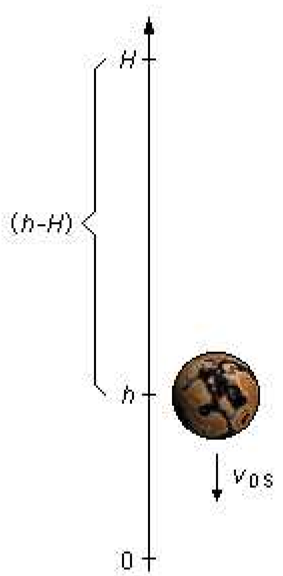

figura 2

observação: *a aceleração da gravidade é maior que zero* ($g > 0$)*, como* $h < H$*, temos que o espaço percorrido é menor que zero* ($\Delta S = h - H < 0$)*, multiplicado pelo fator (–2) o termo dentro da raiz é maior que zero.*

Substituindo a equação (II) em (I)

$$0 = h - \sqrt{-2\, g \left(h - H \right)}\; T - \frac{g}{2} T^2$$

isolando o termo com a raiz quadrada do lado esquerdo da igualdade, temos

$$\sqrt{-2\,g\,(h-H)}\;T=h-\frac{g}{2}\,T^{2}$$

elevando os dois lados da igualdade ao quadrado, escrevemos

$$\left(\sqrt{-2\,g\,(h-H)}\;T\right)^{2}=\left(h-\frac{g}{2}\,T^{2}\right)^{2}$$

o termo do lado direito da igualdade é um produto notável da forma $(a-b)^{2}=a^{2}-2\,a\,b+b^{2}$, assim

$$-2\,g\,(h-H)\,T^{2}=h^{2}-2\,h\,\frac{g}{2}\,T^{2}+\frac{g^{2}}{4}\,T^{4}$$

multiplicando a equação por 4 vem que

$$-4.2g\,(h-H)\,T^{2}=4h^{2}-4.2h\frac{g}{2}T^{2}+4\frac{g^{2}}{4}T^{4}$$
$$-8g\,(h-H)\,T^{2}=4h^{2}-4hgT^{2}+g^{2}T^{4}$$

aplicando a propriedade distributiva ao lado esquerdo da equação obtemos

$$-8ghT^{2}+8gHT^{2}=4h^{2}-4hgT^{2}+g^{2}T^{4}$$
$$8gH.T^{2}=4h^{2}-4ghT^{2}+g^{2}T^{4}+8ghT^{2}$$
$$H=\frac{4h^{2}+4ghT^{2}+g^{2}T^{4}}{8gT^{2}}$$

o termo do numerador é da forma $a^{2}+2ab+b^{2}$ com

$$a^{2}=4h^{2}$$
$$2ab=4ghT^{2}$$
$$b^{2}=g^{2}T^{4}$$

e pode ser escrito como o produto notável $(a+b)^{2}$, a solução do problema é

$$\boxed{H=\frac{\left(2h+gT^{2}\right)^{2}}{8gT^{2}}}$$