De duas cidades *A* e *B*, separadas por uma distância Δ*S*, partem, ao nascer do Sol, um carro de cada cidade com destino a outra com velocidades constantes. Ao meio-dia eles se cruzam, o carro que partiu da cidade *A* chega a cidade *B* às 16 horas e o carro que partiu da cidade *B* chega a cidade *A* às 21 horas. Determinar a que horas nasceu o Sol.

Esquema do problema

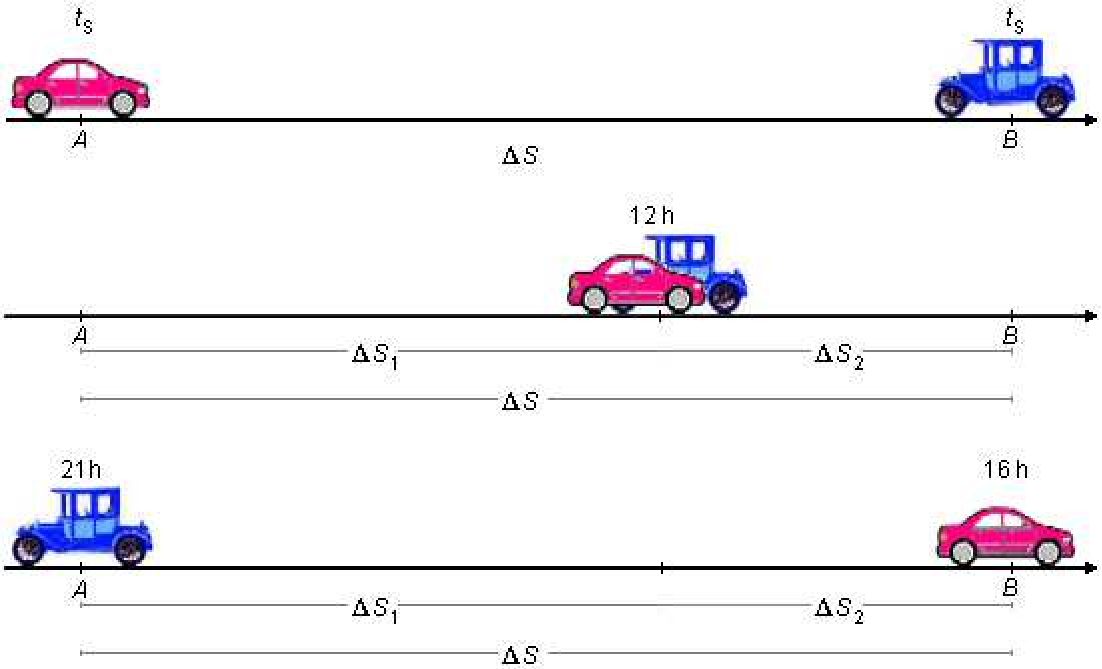

figura 1

Dados do problema

- distância entre as cidades: ΔS;
- instante do cruzamento entre os carros: $t_S = 12$ h;
- instante da chegada do carro de *A* em *B*: $t_{AB} = 16$ h;
- instante da chegada do carro de *B* em *A*: $t_{BA} = 21$ h;
- velocidade do carro que partiu da cidade *A*: v_A;
- velocidade do carro que partiu da cidade *B*: v_B.

Solução

A distância total percorrida pelos carros é Δ*S*, dividindo este intervalo em duas partes, ΔS_1 - distância percorrida pelo carro que saiu de *A* até o instante do encontro com o outro carro, e, ΔS_2 - distância percorrida pelo carro que saiu de *B* até o encontro, portanto temos $\Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2$. Os dois intervalos são diferentes, pois os carros se encontram no meio do dia (12 h), mas não no meio do caminho, eles saem de suas cidades a mesma hora (nascer do Sol), mas chegam com horários diferentes, logo suas velocidades são diferentes.

Os carros estão se movimentando com velocidade constante, estão em *Movimento Retilíneo Uniforme* (*M.R.U.)*, neste tipo de movimento a velocidade média no trajeto coincide com a velocidade do móvel em qualquer ponto da trajetória, e é dada pela fórmula

$$v_m=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Escrevendo a expressão da velocidade do carro de *A* nos intervalos ΔS_1 e ΔS_2

$$
\begin{gathered}
v_{\text{A}}=\frac{\Delta S_{1}}{\left(12-t_{\text{S}}\right)}\\
\Delta S_{1}=v_{\text{A}}.\left(12-t_{\text{S}}\right)
\end{gathered}
\tag{I}
$$

$$
\begin{gathered}
v_{\text{A}}=\frac{\Delta S_{2}}{\left(16-12\right)}=\frac{\Delta S_{2}}{4}\\
\Delta S_{2}=4\,v_{\text{A}}
\end{gathered}
\tag{II}
$$

as expressões para o carro que parte *B* serão

$$
\begin{gathered}
v_{\text{B}}=\frac{\Delta S_{2}}{\left(12-t_{\text{S}}\right)}\\
\Delta S_{2}=v_{\text{B}}.\left(12-t_{\text{S}}\right)
\end{gathered}
\tag{III}
$$

$$
\begin{gathered}
v_{\text{B}}=\frac{\Delta S_{1}}{\left(21-12\right)}=\frac{\Delta S_{1}}{9}\\
\Delta S_{1}=9\,v_{\text{B}}
\end{gathered}
\tag{IV}
$$

As equações (I), (II), (III) e (IV) formam o seguinte sistema

$$
\left|\begin{array}{l}
\Delta S_{1}=v_{\text{A}}.\left(12-t_{\text{S}}\right)\\
\Delta S_{2}=4v_{\text{A}}\\
\Delta S_{2}=v_{\text{B}}.\left(12-t_{\text{S}}\right)\\
\Delta S_{1}=9v_{\text{B}}
\end{array}\right.
$$

este sistema possui quatro equações e cinco incógnitas (ΔS_1, ΔS_2, v_{A}, v_{B} e t_{S}) então é um sistema indeterminado.

Como v_{A} aparece nas equações (I) e (II) podemos encontrar uma relação entre elas dividindo uma pela outra.

$$
\frac{\Delta S_{1}}{\Delta S_{2}}=\frac{v_{\text{A}}.\left(12-t_{\text{S}}\right)}{4v_{\text{A}}}
$$

simplificando v_{A}, reescrevemos

$$
4\Delta S_{1}=\left(12-t_{\text{S}}\right).\Delta S_{2}
\tag{V}
$$

Analogamente v_{B} aparece nas equações (III) e (IV) dividindo uma pela outra

$$
\frac{\Delta S_{2}}{\Delta S_{1}}=\frac{v_{\text{B}}.\left(12-t_{\text{S}}\right)}{9v_{\text{B}}}
$$

simplificando v_{B} temos

$$
\left(12-t_{\text{S}}\right).\Delta S_{1}=9\Delta S_{2}
\tag{VI}
$$

As equações (V) e (VI) formam um sistema de duas equações

$$\left|\begin{array}{l} 4\Delta S_1=\left(12-t_S\right).\Delta S_2 \\ \left(12-t_S\right).\Delta S_1=9\Delta S_2 \end{array}\right.$$

este sistema também é indeterminado pois possui duas equações e três incógnitas (ΔS_1, ΔS_2 e t_S), dividindo (V) por (VI) temos a relação

$$\frac{4\Delta S_1}{\left(12-t_S\right).\Delta S_1}=\frac{\left(12-t_S\right).\Delta S_2}{9\Delta S_2}$$

simplificando ΔS_1 do lado esquerdo e ΔS_2 do lado direito e multiplicando em "cruz" temos

$$\begin{gathered} 4.9=\left(12-t_S\right).\left(12-t_S\right) \\ 36=\left(12-t_S\right)^2 \end{gathered}$$

o termo $\left(12-t_S\right)^2$ é um produto notável da forma $\left(a-b\right)^2=a^2-2ab+b^2$, portanto obtemos

$$\begin{gathered} 144-24t_S+t_S^2=36 \\ t_S^2-24t_S+144-36=0 \\ t_S^2-24t_S+108=0 \end{gathered}$$

Esta é uma *Equação do 2.º Grau* onde a incógnita é o valor desejado t_S, resolvendo

$$\Delta=b^2-4.a.c=\left(-24\right)^2-4.1.108=576-432=144$$

$$t_S=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}=\frac{24\pm\sqrt{144}}{2.1}=\frac{24\pm 12}{2}$$

as duas raízes da equação serão

$$t_{S1}=18 \qquad \text{e} \qquad t_{S2}=6$$

então o horário do nascer do Sol foi às **6 h**.

Observação: a solução da equação além de fornecer a hora que nasce o Sol, pedido no problema, ainda dá "de quebra" a hora do por do Sol, às 18 h.