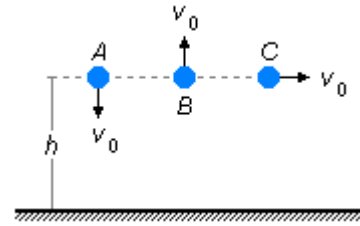


Três esferas idênticas são lançadas de uma mesma altura  $h$  com velocidades de mesmo módulo. A esfera A é lançada verticalmente para baixo, B é lançada verticalmente para cima e C é lançada horizontalmente. Qual delas chega ao solo como maior velocidade em módulo (despreze a resistência do ar).



Dados do problema

- velocidade de lançamento:  $v_0$ ;
- altura do ponto de lançamento:  $h$ .

Solução

- Esfera A

Adotando-se um sistema de referência orientado para cima com origem no solo a aceleração da gravidade e a velocidade da esfera A são negativas (estão orientadas contra o sentido do referencial), figura 1. O movimento da esfera é um lançamento vertical para baixo, como está sofrendo a aceleração da gravidade está em *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.V.)*, pela *Equação de Torricelli* sua velocidade final no solo será

$$v^2 = v_0^2 + 2 g \Delta S$$

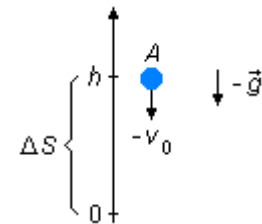
$$v^2 = (-v_0)^2 + 2 (-g) \Delta S$$

$$v^2 = v_0^2 - 2 g (0 - h)$$

$$v^2 = v_0^2 - 2 g \cdot 0 + 2 g h$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 g h$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 g h}$$



(I) figura 1

- Esfera B

O movimento da esfera se divide em duas partes, a primeira é um lançamento vertical para cima, a esfera sobe até uma altura  $H$ , onde sua velocidade se anula, então começa a segunda parte do movimento que é uma queda livre a partir do repouso.

Na primeira parte a velocidade inicial de lançamento é positiva (está orientada no mesmo sentido do referencial) e a velocidade final é nula ( $v_H = 0$ ), é o momento em que a esfera para e inverte o movimento para começar a cair, figura 2-A.

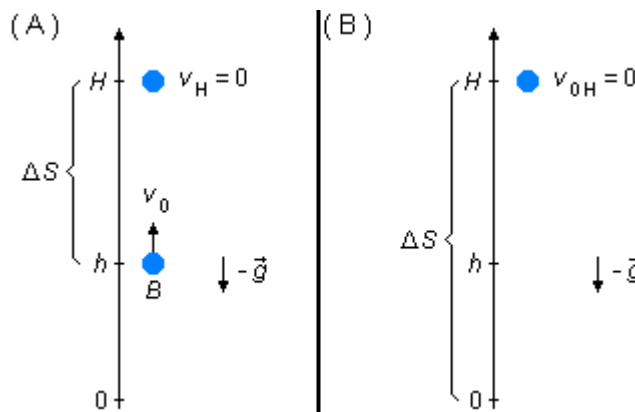


figura 2

Escrevendo a *Equação de Torricelli* para a primeira parte podemos encontrar a altura atingida pela esfera

$$\begin{aligned}
 v^2 &= v_0^2 + 2g \Delta S \\
 v_H^2 &= v_0^2 + 2(-g)\Delta S \\
 0 &= v_0^2 - 2g(H-h) \\
 0 &= v_0^2 - 2gH + 2gh \\
 2gH &= v_0^2 + 2gh \\
 H &= \frac{v_0^2 + 2gh}{2g} \tag{II}
 \end{aligned}$$

Na segunda parte, queda livre, a velocidade inicial será a velocidade final da primeira parte, ela será nula ( $v_{0H} = v_H = 0$ ) e a altura inicial será dada pela expressão (II) encontrada anteriormente, pela *Equação de Torricelli* temos que a velocidade com que a esfera chega ao solo será de

$$\begin{aligned}
 v^2 &= v_0^2 + 2g \Delta S \\
 v^2 &= v_{0H}^2 + 2(-g)\Delta S \\
 v^2 &= 0 - 2g(0-H) \\
 v^2 &= -2g \cdot 0 + 2gH \\
 v^2 &= 2g \left( \frac{v_0^2 + 2gh}{2g} \right) \\
 v^2 &= 2g \frac{v_0^2 + 2gh}{2g} \\
 v^2 &= v_0^2 + 2gh \\
 v &= \sqrt{v_0^2 + 2gh} \tag{III}
 \end{aligned}$$

- Esfera C

O movimento deve ser decomposto nas direções x e y, como se vê na figura 3-A.

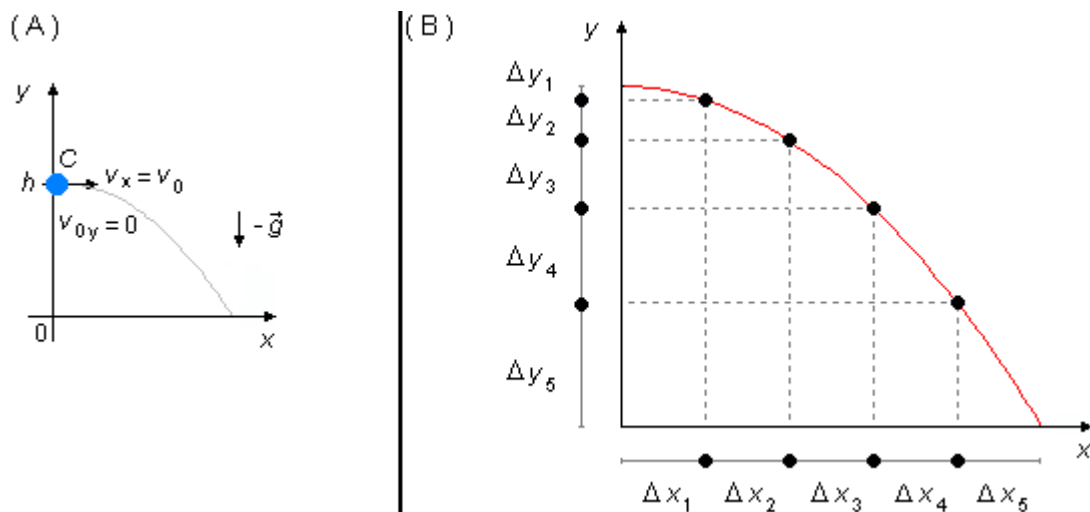


figura 3

Na direção- $x$  não há aceleração atuando sobre a esfera, portanto, ela está em *Movimento Uniforme (M.U.)*, para um mesmo intervalo de tempo os deslocamentos ao longo do eixo- $x$  são iguais ( $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4 = \Delta x_5$ ), figura 3-B. A componente da velocidade nessa direção será a própria velocidade de lançamento da esfera ( $v_0$ ) então a velocidade nesta direção será

$$v_x = v_0 \quad (IV)$$

Na direção- $y$  temos a aceleração da gravidade atuando sobre a esfera, portanto ela está em *Movimento Uniformemente Variado (M.U.V.)*, para um mesmo intervalo de tempo os deslocamentos são cada vez maiores ( $\Delta y_1 < \Delta y_2 < \Delta y_3 < \Delta y_4 < \Delta y_5$ ). Inicialmente a velocidade é nula ( $v_{0y} = 0$ ), a velocidade nessa direção é encontrada aplicando-se a *Equação de Torricelli*

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2g \Delta S \\ v_y^2 &= v_{0y}^2 + 2(-g)\Delta S_y \\ v_y^2 &= 0 - 2g(0-h) \\ v_y^2 &= 2gh \end{aligned} \quad (V)$$

Para encontrar a velocidade com que a esfera atinge o solo é preciso somar as componentes nas direções  $x$  e  $y$ , dadas por (IV) e (V) respectivamente, usando o *Teorema de Pitágoras*, pela figura 4 obtemos

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2gh \\ v &= \sqrt{v_0^2 + 2gh} \end{aligned} \quad (VI)$$

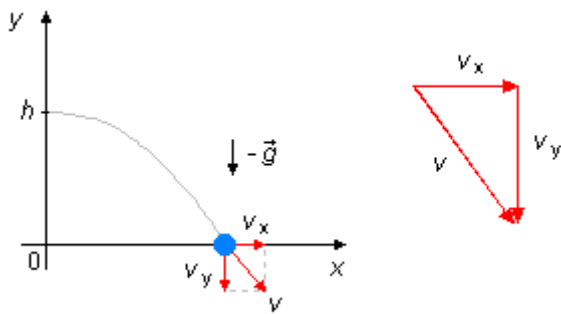


figura 4

Comparando as expressões (I), (III) e (VI) vemos que **todas as esferas chegam ao solo com a mesma velocidade.**