Duas bolas absolutamente elásticas, de massas m_1 e m_2 e velocidades v_1 e v_2 respectivamente, chocam-se frontalmente, suas velocidades estão na direção da linha que une os seus centros. Determinar as velocidades das bolas após o choque nos casos:
a) A velocidade da segunda bola antes do choque é igual a zero;
b) As massas das bolas são iguais.

Dados do problema

- massa da bola 1: m_1;
- massa da bola 2: m_2;
- velocidade inicial da bola 1: v_1;
- velocidade inicial da bola 2: v_2.

Esquema do problema

Adotamos um sistema de referência orientado para a direita, com a velocidade da bola 1 no mesmo sentido do referencial ($v_1>0$) e a velocidade da bola 2 no sentido contrário ($v_2<0$), conforme figura 1.

figura 1

Solução

Como o choque é elástico a quantidade de movimento e a energia cinética do sistema se conservam. Assim começamos por escrever estas equações para as bolas 1 e 2 nas situações antes e depois do choque

Antes do choque		**Depois do choque**	
$Q_{1i}=m_1v_1$	(I)	$Q_{1f}=m_1v_{1f}$	(V)
$Q_{2i}=m_2v_2$	(II)	$Q_{2f}=m_2v_{2f}$	(VI)
$E_{C1}^{i}=\dfrac{m_1v_1^2}{2}$	(III)	$E_{C1}^{f}=\dfrac{m_1v_{1f}^2}{2}$	(VII)
$E_{C2}^{i}=\dfrac{m_2v_2^2}{2}$	(IV)	$E_{C2}^{f}=\dfrac{m_2v_{2f}^2}{2}$	(VIII)

Usando o *Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento* com as equações (I) e (II) antes do choque e as equações (V) e (VI) depois do choque, temos

$$Q_i=Q_f$$
$$m_1v_1-m_2v_2=m_1v_{1f}+m_2v_{2f} \tag{IX}$$

Usando o *Princípio da Conservação da Energia* com as equações (III) e (IV) antes do choque e as equações (VII) e (VIII) depois do choque, temos

$$E_{Ci}=E_{Cf}$$
$$\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{m_1v_{1f}^2}{2}+\frac{m_2v_{2f}^2}{2}$$

simplificando o fator 2 de ambos os lados da igualdades, obtemos

$$m_1v_1^2+m_2v_2^2=m_1v_{1f}^2+m_2v_{2f}^2 \tag{X}$$

As expressões (IX) e (X) formam um sistema de duas equações a duas incógnitas (v_{1f} e v_{2f})

$$\left|\begin{array}{l} m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2 \end{array}\right. \qquad \text{(XI)}$$

a) Fazendo $v_2 = 0$ no sistema (XI), temos

$$\left|\begin{array}{l} m_1 v_1 - m_2 .0 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ m_1 v_1^2 + m_2 .0^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} m_1 v_1 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ m_1 v_1^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2 \end{array}\right.$$

isolando o valor de v_{2f} na primeira equação, temos

$$m_2 v_{2f} = m_1 v_1 - m_1 v_{1f}$$

$$v_{2f} = \frac{1}{m_2}\left(m_1 v_1 - m_1 v_{1f} \right) \qquad \text{(XII)}$$

e substituindo na segunda, obtemos

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 \left[\frac{1}{m_2}\left(m_1 v_1 - m_1 v_{1f} \right) \right]^2$$

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 \frac{1}{m_2^2}\left(m_1 v_1 - m_1 v_{1f} \right)^2$$

o termo entre parênteses do lado direito da igualdade é um *Produto Notável* do tipo $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ aplicando à expressão acima e simplificando o termo m_2 no numerador e denominador, temos

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{m_2}\left(m_1^2 v_1^2 - 2 m_1^2 v_1 v_{1f} + m_1^2 v_{1f}^2 \right) \qquad \text{(XIII)}$$

multiplicando toda a expressão (XIII) por m_2

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{m_2}\left(m_1^2 v_1^2 - 2 m_1^2 v_1 v_{1f} + m_1^2 v_{1f}^2 \right) \qquad (\times m_2)$$

$$m_1 m_2 v_1^2 = m_1 m_2 v_{1f}^2 + m_1^2 v_1^2 - 2 m_1^2 v_1 v_{1f} + m_1^2 v_{1f}^2$$

simplificando o termo m_1 de ambos os lados da igualdade, obtemos

$$m_2 v_1^2 = m_2 v_{1f}^2 + m_1 v_1^2 - 2 m_1 v_1 v_{1f} + m_1 v_{1f}^2$$

coletando os termos em v_{1f} e v_{1f}^2

$$\left(m_2 + m_1 \right) v_{1f}^2 - 2 m_1 v_1 \, v_{1f} + m_1 v_1^2 - m_2 v_1^2 = 0$$

Esta é uma *Equação do 2.º Grau* do tipo $a x^2 + b x + c = 0$ onde a incógnita é o valor desejado v_{1f}, sendo

$$\underbrace{\left(m_2 + m_1 \right)}_{a} \underbrace{v_{1f}^2}_{x^2} - \underbrace{2 m_1 v_1}_{b} \underbrace{v_{1f}}_{x} + \underbrace{m_1 v_1^2 - m_2 v_1^2}_{c} = 0$$

resolvendo

$$\Delta=b^2-4ac=\left(-2m_1v_1\right)^2-4\left(m_2+m_1\right)\left(m_1v_1^2-m_2v_1^2\right)$$
$$\Delta=4m_1^2v_1^2-4\left(m_1m_2v_1^2-m_2^2v_1^2+m_1^2v_1^2-m_1m_2v_1^2\right)$$
$$\Delta=4m_1^2v_1^2-4\left(-m_2^2v_1^2+m_1^2v_1^2\right)$$
$$\Delta=4m_1^2v_1^2+4m_2^2v_1^2-4m_1^2v_1^2$$
$$\Delta=4m_2^2v_1^2$$

$$v_{1f}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-\left(-2m_1v_1\right)\pm\sqrt{4m_2^2v_1^2}}{2\left(m_1+m_2\right)}$$
$$v_{1f}=\frac{2m_1v_1\pm 2m_2v_1}{2\left(m_1+m_2\right)}$$
$$v_{1f}=\frac{m_1v_1+m_2v_1}{\left(m_1+m_2\right)}\quad\text{ou}\quad v_{1f}=\frac{m_1v_1-m_2v_1}{\left(m_1+m_2\right)}$$

$$v_{1f}=\frac{\left(m_1+m_2\right)}{\left(m_1+m_2\right)}v_1$$
$$v_{1f}=v_1 \tag{XIV}$$

ou

$$\boxed{v_{1f}=\frac{\left(m_1-m_2\right)}{\left(m_1+m_2\right)}v_1}$$

substituindo esta solução na expressão (XII), obtemos

$$v_{2f}=\frac{1}{m_2}\left[m_1v_1-m_1\frac{\left(m_1-m_2\right)}{\left(m_1+m_2\right)}v_1\right]$$
$$v_{2f}=\frac{1}{m_2}\left[\frac{m_1v_1\left(m_1+m_2\right)-m_1\left(m_1-m_2\right)v_1}{\left(m_1+m_2\right)}\right]$$
$$v_{2f}=\frac{1}{m_2}\left[\frac{m_1^2v_1+m_1m_2v_1-m_1^2v_1+m_1m_2v_1}{\left(m_1+m_2\right)}\right]$$
$$v_{2f}=\frac{1}{m_2}\left[\frac{2m_1m_2v_1}{\left(m_1+m_2\right)}\right]$$
$$v_{2f}=\frac{m_2}{m_2}\left[\frac{2m_1v_1}{\left(m_1+m_2\right)}\right]$$

$$\boxed{v_{2f}=\frac{2m_1v_1}{\left(m_1+m_2\right)}}$$

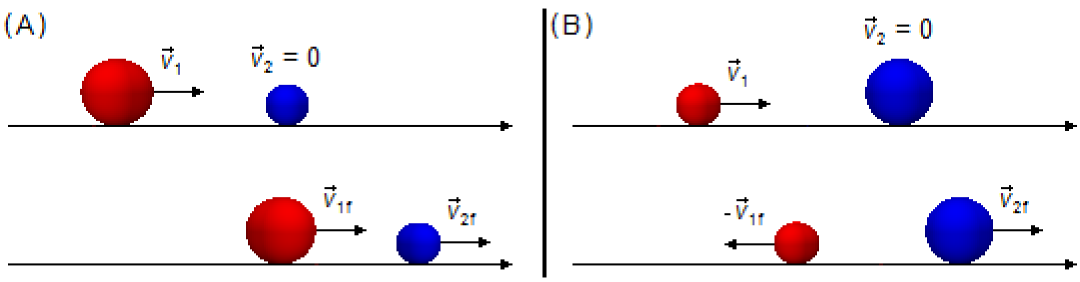

figura 2

Se $m_1>m_2$, a velocidade final da bola 1 será positiva ($v_{1f}>0$), pois $m_1-m_2>0$, a velocidade final da bola 2 também será positiva ($v_{2f}>0$). Isto significa que após o choque a bola 1 continua se deslocando no mesmo sentido da trajetória com velocidade menor e a bola 2, que estava em repouso, começa a se deslocar no mesmo sentido (figura 2-A - acima).

Se $m_1 < m_2$, a velocidade final da bola 1 será negativa ($v_{1f}<0$), pois $m_1-m_2<0$, a velocidade final da bola 2 será positiva ($v_{2f}>0$). Isto significa que a bola 1 que se deslocava no mesmo sentido da trajetória inverte seu movimento após o choque e volta contra a orientação da trajetória, a bola 2 começa a se deslocar favor da orientação da trajetória (figura 2-B).

Substituindo a solução (XIV) na expressão (XII), obtemos

$$
\begin{gathered}
v_{2f}=\frac{1}{m_2}(m_1v_1-m_1v_1)\\
v_{2f}=\frac{1}{m_2}.0\\
v_{2f}=0
\end{gathered}
\tag{XV}
$$

Observação: as soluções (XIV) e (XV) não foram utilizadas pois apresentam uma impossibilidade física. A bola 1 continuaria com sua velocidade a favor da orientação da trajetória e a bola 2 continuaria em repouso, não haveria choque, a bola 1 seria uma "bola fantasma" passando uma através da bola 2 (figura 4).

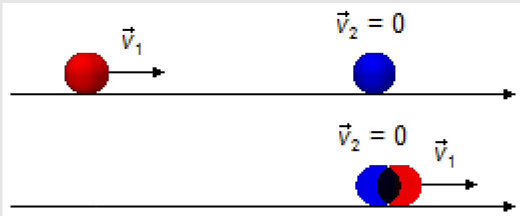

figura 3

b) Fazendo $m_1 = m_2 = m$ no sistema (XI), obtemos

$$
\left|\begin{array}{l}
mv_1-mv_2=mv_{1f}+mv_{2f}\\
mv_1^2+mv_2^2=mv_{1f}^2+mv_{2f}^2
\end{array}\right.
$$

simplificando a massa m de ambos os lados da igualdade nas duas equações, temos

$$
\left|\begin{array}{l}
v_1-v_2=v_{1f}+v_{2f}\\
v_1^2+v_2^2=v_{1f}^2+v_{2f}^2
\end{array}\right.
$$

isolando o valor de v_{2f} na primeira equação, ficamos com

$$
v_{2f}=v_1-v_2-v_{1f} \tag{XVI}
$$

e substituindo na segunda, obtemos

$$
v_1^2+v_2^2=v_{1f}^2+(v_1-v_2-v_{1f})^2
$$

o termo entre parênteses do lado direito da igualdade é do tipo $(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$ aplicando à expressão acima, temos

$$
v_1^2+v_2^2=v_{1f}^2+v_1^2-2v_1v_2-2v_1v_{1f}+v_2^2+2v_2v_{1f}+v_{1f}^2
$$

Observação: na dúvida podemos multiplicar diretamente os dois termos

$$
\begin{array}{l}
v_1-v_2-v_{1f} \\
v_1-v_2-v_{1f} \\
\hline
v_1^2-v_1 v_2-v_1 v_{1f} \\
\quad -v_1 v_2 \qquad\quad +v_2^2+v_2 v_{1f} \\
\qquad\quad -v_1 v_{1f} \qquad +v_2 v_{1f}+v_{1f}^2 \\
\hline
v_1^2-2v_1 v_2-2v_1 v_{1f}+v_2^2+2v_2 v_{1f}+v_{1f}^2
\end{array}
$$

simplificando os termos v_1^2 e v_2^2 de ambos os lados da igualdade, obtemos

$$0=v_{1f}^2-2v_1 v_2-2v_1 v_{1f}+2v_2 v_{1f}+v_{1f}^2$$

coletando os termos em v_{1f} e v_{1f}^2

$$2v_{1f}^2+\left(2v_2-2v_1\right)v_{1f}-2v_1 v_2=0$$

Esta é uma *Equação do 2.º Grau* do tipo $a x^2+b x+c=0$ onde a incógnita é o valor desejado v_{1f}, sendo

$$\underbrace{2}_{a}\,\underbrace{v_{1f}^2}_{x^2}+\underbrace{\left(2v_2-2v_1\right)}_{b}\,\underbrace{v_{1f}}_{x}\underbrace{-2v_1 v_2}_{c}=0$$

resolvendo

$$
\begin{aligned}
\Delta &= b^2-4ac=\left(2v_2-2v_1\right)^2-4.2\left(-2v_1 v_2\right)\\
\Delta &= 4v_2^2-8v_1 v_2+4v_1^2-8\left(-2v_1 v_2\right)\\
\Delta &= 4v_1^2-8v_1 v_2+4v_2^2+16v_1 v_2\\
\Delta &= 4v_1^2+8v_1 v_2+4v_2^2\\
\Delta &= 4\left(v_1^2+2v_1 v_2+v_2^2\right)
\end{aligned}
$$

o termo entre parênteses é um *Produto Notável* do tipo $\left(a^2+2ab+b^2\right)=\left(a+b\right)^2$, então

$$\Delta=4\left(v_1+v_2\right)^2$$

$$v_{1f}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-\left(2v_2-2v_1\right)\pm\sqrt{4\left(v_1+v_2\right)^2}}{2.2}$$

$$v_{1f}=\frac{2\left(v_1-v_2\right)\pm 2\left(v_1+v_2\right)}{2.2}$$

$$v_{1f}=\frac{v_1-v_2+\left(v_1+v_2\right)}{2} \quad \text{ou} \quad v_{1f}=\frac{v_1-v_2-\left(v_1+v_2\right)}{2}$$

$$v_{1f}=\frac{v_1-v_2+v_1+v_2}{2} \quad \text{ou} \quad v_{1f}=\frac{v_1-v_2-v_1-v_2}{2}$$

$$v_{1f}=\frac{2}{2}v_1 \quad \text{ou} \quad v_{1f}=-\frac{2}{2}v_2$$

$$v_{1f}=v_1 \tag{XVII}$$

ou

$$\boxed{v_{1f}=-v_2}$$

substituindo esta solução na expressão (XVI), obtemos

$$v_{2f}=v_1-v_2-(-v_2)$$
$$v_{2f}=v_1-v_2+v_2$$

$$\boxed{v_{2f}=v_1}$$

Substituindo a solução (XVII) na expressão (XVI), obtemos

$$v_{2f}=v_1-v_2-v_1$$
$$v_{2f}=-v_2 \qquad \text{(XVIII)}$$

Observação: as soluções (XVII) e (XVIII) não foram utilizadas pois apresentam uma impossibilidade física. A bola 1 continuaria com sua velocidade a favor da orientação da trajetória e a bola 2 continuaria com sua velocidade contra a orientação da trajetória, não haveria choque, seriam duas "bolas fantasmas" passando uma através da outra (figura 4).

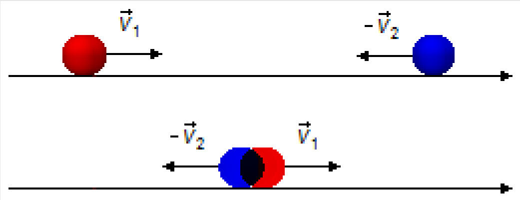

figura 4