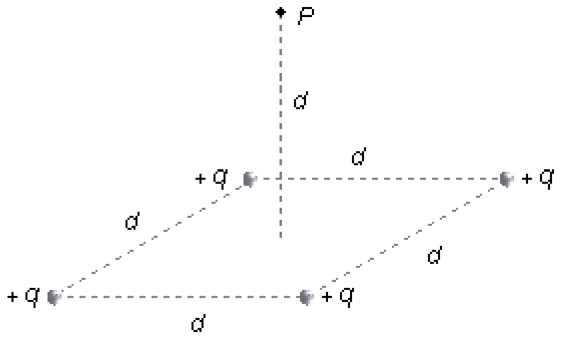
Quatro cargas positivas iguais a q, estão localizadas sobre um plano horizontal nos vértices de um quadrado de lado d.
a) Encontrar a intensidade do campo elétrico num ponto P acima do centro do quadrado a uma distância igual a d. Admita que as cargas estão num meio onde a constante eletrostática vale k_0.
b) Se uma carga $Q<0$ for colocada em P, qual a força elétrica que vai agir nessa carga.



Esquema do problema

Como todas as cargas são positivas elas produzem um campo elétrico de afastamento no ponto P e como os valores das cargas são iguais a intensidade do campo elétrico (E) será a mesma (figura 1).

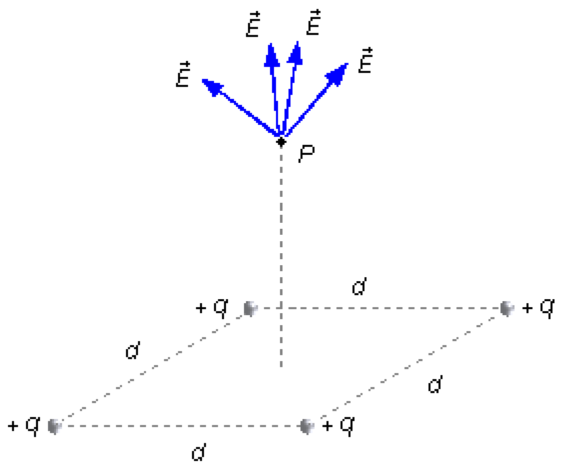


figura 1

Dados do problema

- valor das cargas elétrica: $+q$;
- distância entre as cargas: d;
- constante eletrostática: k_0.

Solução

a) Olhando para um plano vertical que passa por uma das cargas da base e pelo ponto P (figura 2), temos que o campo elétrico, em módulo, vale

$$E=k_0\frac{q}{r^2} \tag{I}$$

Esse campo elétrico deve ser decomposto nas direções paralela ao plano das cargas (E_P) e normal a este (E_N), desenhando o campo elétrico num sistema de eixos coordenados e obtendo as suas componentes temos (figura 3)

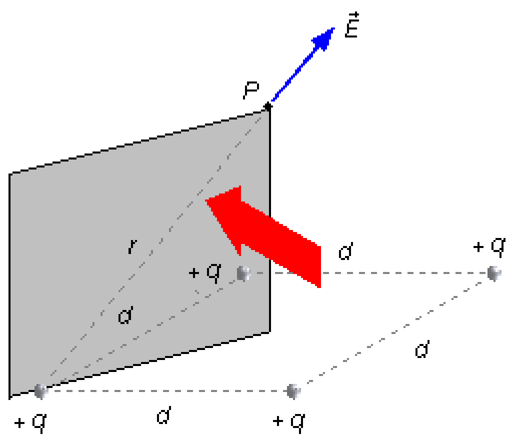


figura 2

$$E_P=E\ \text{sen}\ \theta \qquad \text{e} \qquad E_N=E\cos\theta \tag{II}$$

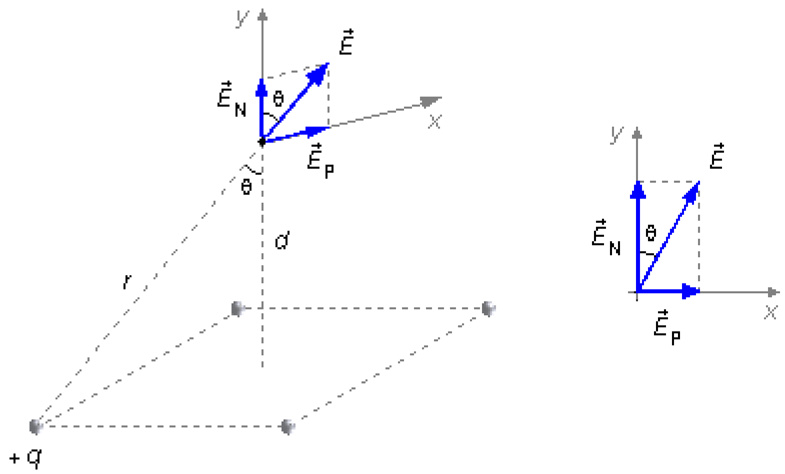


figura 3

onde o ângulo θ medido entre o vetor campo elétrico $\vec{E}$ e a componente normal $\vec{E}_N$ ao plano é o mesmo ângulo medido entre a distância *r* da carga ao ponto *P* e a altura *d* do centro do quadrado até o ponto (são ângulos opostos pelo vértice).

- Campo elétrico paralelo ao plano E_P:

Por simetria do problema cada carga do quadrado vai gerar um campo elétrico de mesma intensidade em *P*, assim temos quatro componentes paralelas E_P nesse ponto (figura 4-A). Olhando de cima (figura 4-B) vemos que o campo elétrico gerado pelas cargas em *P* se anulam dois a dois. Ou pelo *Método do Polígono* para soma de vetores (figura 4-C) temos que estes quatro vetores campo elétrico formam uma poligonal fechada, portanto a resultante do campo elétrico paralelo à base é nula.

$$E_P+E_P+E_P+E_P=0$$

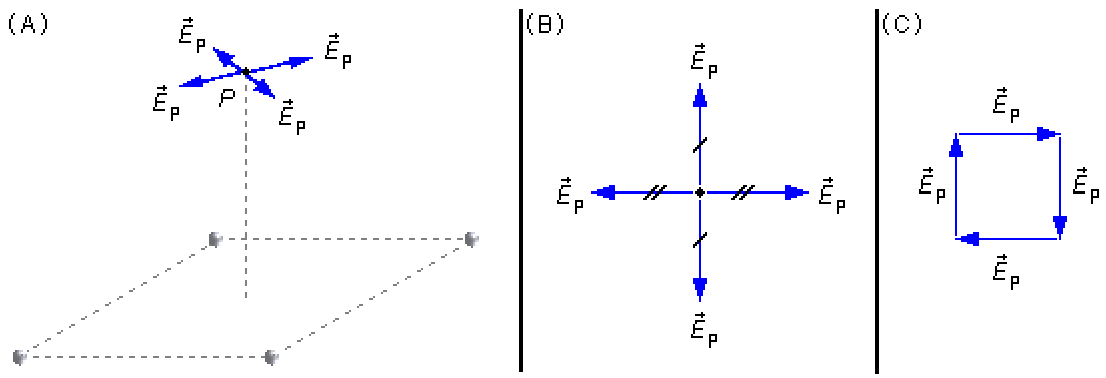


figura 4

- Campo elétrico normal ao plano E_N:

Para encontrarmos o valor da componente normal $\vec{E}_N$ ao plano devemos encontrar o co-seno do ângulo θ em função da distância *d* entre o centro do quadrado da base e o ponto *P*. O co-seno de θ é calculado por

$$\cos\theta=\frac{d}{r} \tag{III}$$

O comprimento da diagonal do quadrado da base pode ser encontrado usando-se o *Teorema de Pitágoras* (figura 5)

$$h^2=d^2+d^2$$
$$h^2=2d^2$$
$$h=\sqrt{2d^2}$$
$$h=d\sqrt{2} \qquad \text{(IV)}$$

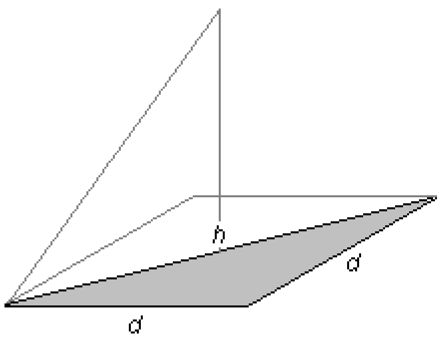


figura 5

A diagonal h é dividida em dois segmentos de tamanhos $\dfrac{d\sqrt{2}}{2}$ (figura 6) de onde usando-se o *Teorema de Pitágoras* podemos determinar r em função de d

$$r^2=d^2+\left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$r^2=d^2+\frac{2d^2}{4}$$
$$r^2=d^2+\frac{d^2}{2}$$

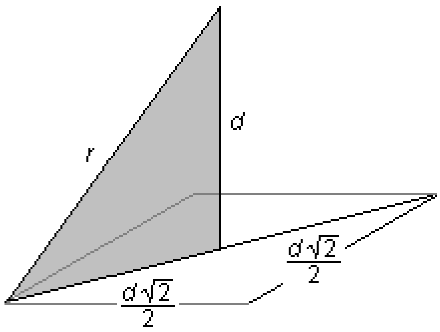


figura 6

o *Mínimo Múltiplo Comum* (*M.M.C.*) entre 1 e 2 é 2

$$r^2=\frac{2d^2+d^2}{2}$$
$$r^2=\frac{3d^2}{2}$$
$$r=\sqrt{\frac{3d^2}{2}}$$
$$r=d\sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$r=d\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{2}$, temos

$$r=d\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$r=d\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad \text{(V)}$$

substituindo (V) em (**III**) o co-seno de θ vale

$$\cos\theta=\frac{d}{\dfrac{d\sqrt{6}}{2}}$$
$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{6}$, temos

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{6}}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$
$$\cos\theta=\frac{2\sqrt{6}}{6}$$

Substituindo a expressão (I) na segunda expressão de (II) o campo elétrico normal ao plano no ponto *P* vale

$$E_{N}=k_{0}\frac{q}{r^{2}}\cos\theta \qquad \text{(VI)}$$

substituindo a expressão (V) e o co-seno encontrado acima em (VI), obtemos

$$E_{N}=k_{0}\frac{q}{\left(d\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{2}}\frac{2\sqrt{6}}{6}$$
$$E_{N}=k_{0}\frac{q}{d^{2}\frac{6}{4}}\frac{2\sqrt{6}}{6}$$
$$E_{N}=k_{0}\frac{q}{d^{2}}\frac{2\sqrt{6}}{6}\frac{4}{6}$$
$$E_{N}=k_{0}\frac{q}{d^{2}}\frac{8\sqrt{6}}{36}$$
$$E_{N}=\frac{2\sqrt{6}}{9}k_{0}\frac{q}{d^{2}}$$

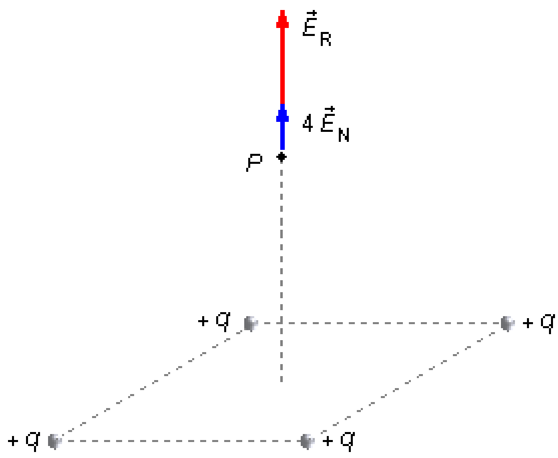


figura 7

Por simetria o campo elétrico no ponto *P* gerado pelas outras três cargas da base é o mesmo, então o campo elétrico resultante sobre em *P* será (figura 7)

$$E_{R}=4E_{N}$$

$$\boxed{E_{N}=\frac{8\sqrt{6}}{9}k_{0}\frac{q}{d^{2}}}$$

b) O módulo da força elétrica é dado por

$$F_{E}=qE$$

usando o resultado do item anterior e a carga dada a força elétrica sobre a carga no ponto *P* vale

$$F_{E}=-Q\frac{8\sqrt{6}}{9}k_{0}\frac{q}{d^{2}}$$

$$\boxed{F_{E}=-\frac{8\sqrt{6}}{9}k_{0}\frac{Qq}{d^{2}}}$$

o sinal de negativo indica que a força elétrica possui sentido oposto ao do campo elétrico (figura 8).

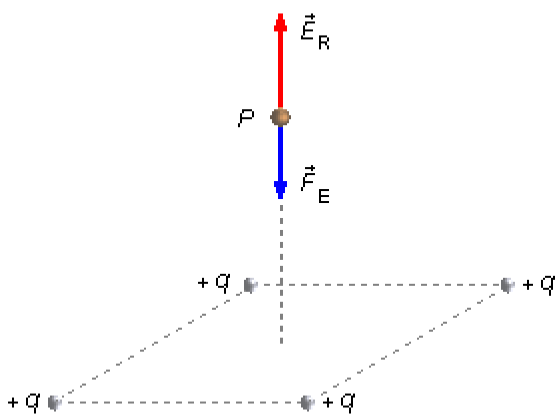


figura 8